ПРЕДГОВОР

Ова књига је настала на основу жеље и намере аутора да обезбеде литературу из основа индустријске роботике за студенте различитих студијских програма и профила. У овом тренутку се планира да књига буде коришћена у настави индустријске роботике за студенте мехатронике, електротехнике, индустријског инжењерства и машинства, у Новом Саду и Нишу. Очекујемо да ће њено коришћење бити проширено.

У Уводу се читаоцима после кратког прегледа историјата дају основне информације о развоју роботике и предностима и разлозима за увођење робота у процес производње. У другом поглављу се уводе основни појмови и дефиниције везане за индустријску роботику и објашњавају основне конфигурације. Обзиром да је основа кинематског модела робота низ координатних система придружених сегментима механичке структуре у трећем поглављу се описују елементарне трансформације координатних система, уводи се појам хомогених трансформација и прописује начин постављања координатних система на сегменте робота (ДХ нотација). Затим се дефинишу директни и инверзни кинематски задатак. У четвртом поглављу се наставља са проблематиком кинематике, уводи се Јакобијан, даје се алгоритам његовог нумеричког срачунавања као и алгоритам нумеричког решавања инверзног кинематског задатка. У петом поглављу су размотрени различити начини на које се може планирати кретање робота у радном простору без препрека. У шестом поглављу се разматра проблем моделирања динамике робота типа једноструког кинематског ланца тј. разматра се срачунавање сила које настају током кретања робота и њиховог утицаја на погонске моменте у зглобовима што представља основу за синтезу управљања кретањем робота. У седмом поглављу се даје преглед основних компоненти и подсистема савремених роботских система, док се у осмом поглављу детаљно обрађује комплексна проблематика управљања кретањем индустријских робота. У деветом поглављу се обрађују различити аспекти програмирања робота док се у десетом поглављу разматра проблематика примене робота у различитим индустријским задацима.

Сва излагања су праћена мањим бројем урађених примера који илуструју изложену материју. Треба напоменути да, поред овог уџбеника, саставни део литературе која прати овај предмет представљају и Збирка решених задатака из индустријске роботике и Практикум за вежбе из програмирања робота (који је базиран на АББ-овом програмском језику РАПИД). Очекујемо да ће обе публикације врло ускоро бити завршене и да ће се појавити пред читаоцима.

Писање ове књиге је трајало веома дуго. Један од најважнијих разлога, а свакако и најболнији, је тај што смо током рада изгубили колегу мр. Милана Рашића који је преминуо. Сасвим је сигурно да тај губитак нисмо успели да надокнадимо, а завршетак и издавање ове књиге сматрамо и својим дугом њему.

И поред уложеног напора да се текст доведе на жељени ниво сигурни смо да заосталих грешака има. Због тога ће аутори бити веома захвални на сваком добронамерном указивању на евентуалне грешке или нејасноће у излагању. Најтоплије захваљујемо свим колегама и студентима који су овај текст већ читали и указали нам на поједине грешке.

САДРЖАЈ

Предговор i

Садржај ii

1 Увод 1

2 Дефиниције основних појмова и основне конфигурације индустријских робота 13

2.1 Дефиниције основних појмова . . . 13
2.2 Дефиниција основних координатних система . . . 16
2.3 Основни радни параметри индустријских робота . . . 17
2.4 Основне механичке структуре (конфигурације) индустријских робота . . . 19
2.4.1 Робот антропоморфне конфигурације . . . 19
2.4.2 Робот сферне (поларне) конфигурације . . . 20
2.4.3 Робот цилиндричне конфигурације . . . 21
2.4.4 Робот Сцара конфигурације . . . 21
2.4.5 Робот декартове (правоулге) конфигурације . . . 22
2.4.6 Паралелни роботи . . . 23

3 Кинематски модел робота I: Положај и оријентација сегмената робота у простору 27

3.1 Координатни систем и њихове трансформације . . . 27
3.1.1 Елементарне Ротације . . . 29
3.1.2 Слагање ротација . . . 31
3.1.3 Ротирање у односу на произвољни координатни систем . 35
3.1.4 Ротација око произвољне осе . . . 36
3.1.5 Ојлерови углови . . . 37
3.1.6 Ротација дефинисана угловима скретања, ваљања и пропињања . . . 38
3.1.7 Одређивање осе и угла ротације на основу познате матрице ротације . . . 39
3.1.8 Одређивање Ојлерових углова на основу познате матрице ротације . . . 40
3.1.9 Јединични кватерниони . . . 41
3.1.9.1 Дефиниција јединичних кватерниона . . . 41
3.1.9.2 Слагање кватерниона . . . 42
3.1.9.3 Коњуговани кватернион . . . 43

3.1.9.4 Трансформација веткора када је ротација представљена кватернионом . . . 43
3.1.9.5 Одређивање осе и угла ротације на основу кватерниона . . . 43
3.1.9.6 Одређивање матрице ротације на основу кватерниона . . . 44
3.1.9.7 Одређивање кватерниона на основу матрице ротације . . . 44
3.1.10 Хомогене трансформације . . . 46
3.2 Кинематски модел индустријских робота . . . 50
3.2.1 Денавит - Хартенбергова нотација . . . 51
3.2.2 Директни кинематски проблем . . . 57
3.2.3 Инверзни кинематски проблем . . . 64
3.2.4 Распрезање укупне конфигурације робота на минималну конфигурацију и зглоб хватаљке . . . 68

4 Кинематски модел робота II: диференцијална кинематика 73
4.1 Основе диференцијалне кинематике . . . 73
4.1.1 Основне особине диференцијалних ротација . . . 73
4.1.2 Основне особине кососиметричних матрица . . . 74
4.1.3 Угаоне брзине и убрзања . . . 77
4.1.4 Сабирање угаоних брзина . . . 79
4.1.5 Веза између извода кватерниона и угаоне брзине . . . 80
4.2 Јакобијан . . . 81
4.2.1 Срачунавање геометријског јакобијана . . . 82
4.2.2 Срачунавање аналитичког јакобијана . . . 85
4.2.3 Веза између аналитичког и геометријског јакобијана . . . 88
4.2.4 Јакобијан када је ротација изражена кватернионима . . . 89
4.3 Нумеричко решавање инверзног кинематског проблема . . . 90
4.3.1 Специфичности одређивање грешке и Јакобијана . . . 92
4.3.1.1 Случај 1: Репрезентација оријентације Ојлеровим угловима . . . 92
4.3.1.2 Случај 2: Репрезентација оријентације кватернионима . . . 93
4.3.1.3 Случај 3: Репрезентација оријентације матрицом ротације . . . 93
4.4 Псеудо-инверзни јакобијан . . . 94
4.4.1 Случај 1: $m = n$ . . . 94
4.4.2 Случај 2: $m > n$ . . . 94
4.4.3 Случај 3: $m < n$ - Редундантан манипулатор . . . 95
4.4.4 Мур-Пенрозова псеудоинверзна матрица . . . 96

4.5 Сингуларне конфигурације . . . 97
4.6 Елипсоид брзине и манипулабилност . . . 99
4.7 Инверзна матрица робусна на сингуларитете . . . 101
4.7.1 Одређивање параметра пригушења . . . 103

5 Планирање кретања **105**
5.1 Планирање ПТП кретања . . . 105
5.1.1 Линеарна Интерполација . . . 106
5.1.2 Трапезни профил брзине . . . 107
5.1.3 Интерполација полиномом трећег степена . . . 110
5.1.4 Интерполација полиномом петог степена . . . 113
5.1.5 Примена нормализованих интерполационих полинома . . . 114
5.1.6 Надовезивање трајекторија . . . 116
5.1.7 Интерполација полиномима . . . 117
5.1.7.1 Кубни сплајн . . . 118
5.1.7.2 Сплајн који очувава облик . . . 122
5.2 Планирање ЦП кретања . . . 123
5.2.1 Параметризовано задавање позиције у простору . . . 124
5.2.2 Дефинисање оријентације врха робота у простору . . . 129
5.2.2.1 Интерполација углова помоћу кватерниона . . . 130
5.2.2.2 Оријентација зависна од облика трајекторије . . . 131
5.2.3 Рачунање брзине зглобова током ЦП кретања . . . 138
5.2.4 Ограничења на брзину у зглобовима . . . 140
5.2.5 Ограничења на позизицју, брзину и убрзање у зглобовима 140
5.2.6 Центрирање зглобова . . . 141
5.2.7 Алтернативне формулације оптимизационог проблема . . . 142
5.3 Планирање кретања у присуству препрека . . . 143

6 Статичка и динамичка анализа манипулационих робота **145**
6.1 Статичка анализа . . . 145
6.1.1 Веза спољашњих сила које делују на робот и момената у зглобовима . . . 148
6.1.2 Попустљивост и крутост . . . 151
6.1.3 Трансформација утицаја сила и момената између различитих координатних система . . . 152
6.2 Динамичка анализа . . . 154
6.2.1 Њутн-ојлерова формулација једначина кретања . . . 155
6.2.2 Директни и инверзни задатак динамике и рекурзивни динамички модел . . . 161
6.2.3 Алгоритам формирања динамичког модела . . . 164
6.2.4 Лагранжева формулација једначина кретања . . . 166

7 Основни подсистеми и компоненте индустријских робота 173
7.1 Механичка конфигурација . . . 173
7.2 Редуктори и конверзија ротационог у транслаторно кретање . . 175
7.2.1 Редуктори . . . 176
7.2.2 Конверзија ротационог у транслаторно кретање . . . 181
7.3 Кочнице . . . 181
7.4 Примери трансмисије у индустријској роботици . . . 182
7.5 Сензори у индустријској роботици . . . 185
7.5.1 Инкрементални и апсолутни енкодер . . . 187
7.5.2 Ризолвер . . . 190
7.5.3 Сензор за мерење сила контакта са околином . . . 191
7.6 Контролер индустријског робота . . . 193

8 Управљање индустријским роботима 197
8.1 Дефинисање управљачког задатка . . . 197
8.1.1 Линеарни системи са једним улазом и једним излазом . 201
8.1.2 Линеарни управљачки закони . . . 209
8.2 Управљање кретањем робота . . . 217
8.2.1 Комплетан модел динамике робота . . . 220
8.2.2 Утицај редуктора на линеаризацију и распрезање модела 224
8.3 Управљање по унутрашњим координатама . . . 225
8.3.1 Децентрализовано управљање кретањем зглобова . . . 227
8.3.2 Централизовано управљање кретањем робота . . . 237
8.4 Управљање у спољашњим координатама . . . 243

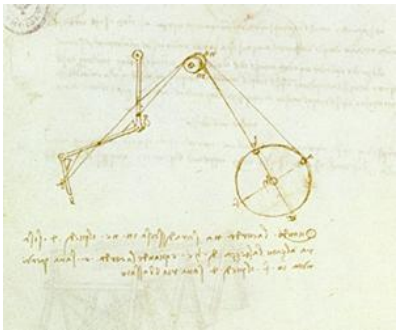
9 Програмирање индустријских робота 247
9.1 Начини програмирања и врсте програмских језика . . . 247
9.2 Основни проблеми програмирања робота . . . 250
9.2.1 Модели околине . . . 251
9.2.2 Описивање задатака . . . 254
9.3 Даљи развој система за програмирање робота . . . 257

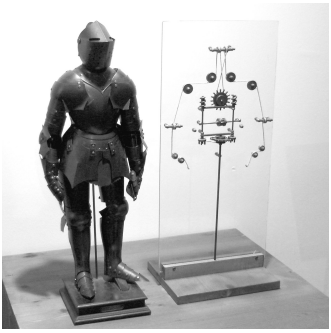
10 Неке специфичности примене робота 261
10.1 Набавка роботског система . . . 261
10.2 Инсталација и коришћење робота . . . 264
10.2.1 Постављање робота на клизни механизам . . . 264
10.2.2 Ограничавање радног простора . . . 265
10.2.3 Безбедносни систем и заустављање . . . 265
10.3 Калибрација . . . 267
10.3.1 Калибрација положаја и идентификација ДХ параметара 269
10.3.2 Калибрација сензора положаја у зглобовима . . . 270

10.3.3 Неке специфичности калибрације код заваривања 271
10.4 Основне карактеристике задатака у којима се примењују роботи 272
10.5 Карактеристични примери примене робота 275

1. УВОД

Појам робота се користи веома често у свакодневном говору. Упркос чињеници да постоји прећутна сагласност о особинама које треба да поседује (очекује се да робот у својој околини делује аутономно, смислено и успешно) још увек не постоји опште прихваћена дефиниција робота. С друге стране, жеља да реализује себи сличне машине које ће га заменити при пословима исувише опасним, напорним или монотоним, код човека вероватно одувек постоји, па су веома често конструкције попримале човеколики изглед (сл. 1.1– 1.3). Иако се у прошлости могу наћи примери механизама који су у стању да реализују веома сложене покрете (Писар (сл. 1.3) је у стању да испише произвољно задат текст дужине од 40 карактера), ипак овакви уређаји не могу бити названи роботима већ само аутоматима, јер могу да реализују само онај задатак за који су пројектовани. Међутим, од робота се очекује да, с обзиром на универзалност сопствене конструкције (са механичког и управљачког аспекта), реализују широк спектар различитих задатака. При томе појединачне реакције и укупно понашање робота треба да буду адекватни. Да би то остварио робот мора да има информације о сопственом стању и околини које добија путем сензора чије сигнале треба обрадити, понекад на веома сложен начин. За реализацију оваквих машина у прошлости није било услова.





Слика 1.1: Скица начина погона ноге робота (лево) и модел витеза, Леонардо да Винчи (Леонардо да Винци), око 1495. год.

Табела 1.1: Преглед развоја роботике

Год	Достигнуће
1898.	Никола Тесла јавно демонстрирао радијом управљани (теледириговани) модел брода
1946.	Џорж Девол (Георге Девол) развио први магнетски контролер; на Пенсилванијском универзитету реализован „Ениак“ („Ениац“), први савремени рачунар
1952.	На МИТ-у реализована НЦ машина. То је први пример где су софтвер и хардвер интегрисани у оквиру истог уређаја
1954.	Џозеф Инглбергер (Јосепх Енгелбергер), студент Колумбија универзитета, откупио права на Деволов робот и основао прву роботску компанију „Јунимејшн“ („Униматион“)

1956.	Израз "вештачка интелигенција" уведен у научну терминологију
1962.	Дженерал Моторс (Генерал Моторс) инсталисао првог робота фирме „Јунимејшн" на пословима опслуживања машине за ливење
1968.	Мобилни робот Шејки (Схакеу) са елементима вештачке интелигенције реализован на СРИ
1972.	Проф. Вукобратовић поставио теоретске принципе двоножног хода (увео појам ЗМП-а)
1973.	Синсинати Милакрон (Цинцинати Милацрон) развио Т3, првог комерцијалног робота
1973.	На Станфорд универзитету развијен први језик за програмирање робота (WAWE)
1976.	У Чарлс Драпер (Цхарлес Драпер) лабораторији на МИТ-у развијен РЦЦ уређај за монтажу
1977.	АСЕА понудила на тржишту два индустријска робота на електрични погон
1978.	Први ПУМА робот из фирме „Јунимејшн" инсталисан у Дженерал Моторс-у
1979.	СЦАРА (Селецтиве Цомплиант Робот фор Ассемблу) реализован у Јапану
1980.	Проф. Миомир Вукобратовић објавио радове о рекурзивном моделирању динамике отворених кинематичких ланаца и синтези динамичког управљања роботима
1984.	На Васеда (Wаседа) универзитету развијен робот Wабот-2 који чита ноте и свира оргуље
1986.	На Васеда универзитету на основу ЗМП прилаза реализован ход двоножног робота (WЛ-12)
1987.	Компамије АСЕА и ББЦ Бровн Бовери формирале АСЕА Бровн Бовери (АББ)
1992.	Истраживачки 8-ножни робот Данте I ушао у кратер вулкана Еребус на Антартктику
1997.	Хонда јавно приказала аутономног хуманоидног робота П3 (осми прототип у оквиру пројекта који је почео 1986. године)
1998.	У Јапану започет велики пројекат Хуманоид
1999.	Компанија Интуитиве Сургицал (основана 1995) приказала роботски систем за лапароскопске операције да Винци.
2000.	Реализован први аутономни хуманоидни робот АСИМО фирме Хонда, Јапан Сону приказао свој хуманоидни робот СДР (Сону Дреам Робот)
2003.	Роботизоване сонде Спирит и Опортјунити (Спирит, Оппортуниту) лансиране на Марс
2007.	На Васеда универзитету приказан робот који свира флауту
2011.	Помоћу мобилних робота прибављене прве информације о стању нуклеарног реактора у Фукушими после катастрофе.
2015.	У Остину, САД, аутономно возило компаније Waумо, је по први пут потпуно аутономно превезло особу. Путник је био Стив Махан који је слеп.
2016.	Међународна организација за стандардизацију издаје техичку спецификацију ИСО/ТС 15066:2016 где се дефинише безбедносне стандарде за роботе који деле радни простор са човеком.
2020.	Америчка компанија иРобот је од свог оснивања продала 30 милиона кућних робота усисивача

За појаву и почетке развоја роботике од суштинског значаја је био развој теорије управљања, рачунара и електронике због чега су њихови развоји уско повезани. У табели 1.1 су наведени неки од кључних тренутака досадашњег развоја роботике који захвата широк спектар, али који се и даље шири. Роботика је свој развој започела у индустрији, али је извесно да ће будући развој ићи у правцу активног укључивања робота у човекову непосредну (животну и радну) околину. То намеће мноштво додатних услова, при чему треба истаћи да се значајно пооштравају и усложњавају захтеви које понашање робота треба да испуни јер, пре свега, треба да буде безбедно по околину, сврсисходно и разумно. Осим тога, због променљивости околине (неструктуираности), програмирање кретања није могуће урадити унапред па ће своје деловање (кретање) роботи морати да дефинишу и реализују "на лицу места" у складу са тренутном ситуацијом у којој се налазе.

Реч робот је у савремени речник 1920. године увео чешки писац Карел Чапек, у свом позоришном комаду „РУР." (Росумови универзални роботи, сл. 1.4). Реч робот потиче од чешке речи робота која означава тешки рад. Мада ће се повремено указивати на различите врсте и примене робота, пажња ће у остатку ове књиге бити доминантно посвећена индустријској роботици.

Постоји више дефиниција робота. Према дефиницији Међународне организације за стандардизацију (стандард ИСО 8373) манипулациони индустријски робот дефинисан је као „аутоматско управљани репрограмабилни вишенаменски манипулатор са три или више управљаних оса, који може бити непокретан или покретан у односу на подлогу и који се користи у задацима индустријске аутоматизације". Према дефиницији Јапанске асоцијације за роботику (JAPA) роботи се могу класификовати у шест класа:

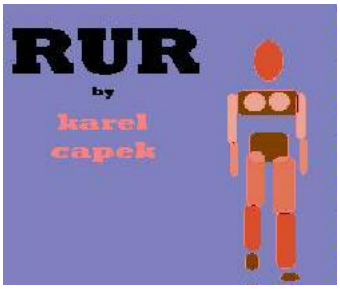
- Ручно (помоћу оператора) управљани уређаји за руковање материјалом;
- Уређај за руковање материјалом који је тако конструисан да може реализовати само фиксни, унапред дефинисани, низ покрета (енгл. Фихед Сеqуенце Робот);
- Уређај за руковање материјалом који је тако конструисан да може остварити низ покрета који лако могу да се модификују (енгл. Вариабле Сеqуенце Робот);

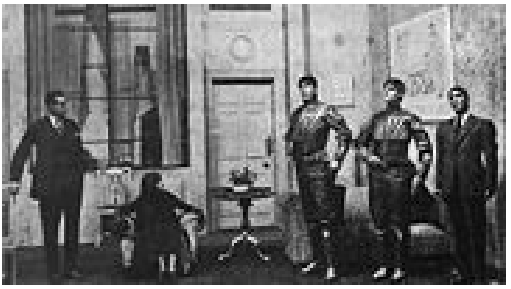


Слика 1.2: Покретне лутке за служење чаја, Јапан, XVIII век



Слика 1.3: Аутомат познат под називом Писар часовничара, Жака Дроза (Јаqует Дроз), око 1750.године





Слика 1.4: Плакат и сцена из представе „РУР“(Росумови универзални роботи) чешког писца Карела Чапека

- Робот код којег се кретање може запамтити ради каснијег понављања (енгл. Плаубацк Робот);
- Нумерички управљани роботи који имају уређај за ручно обучавање провођењем кроз низ дефинисаних положаја;
- Интелигентни роботи који могу да ”разумеју” своју околину и у стању су да заврше задатак упркос измењеним радним условима.

Због несагласности ових дефиниција подаци о броју робота у Јапану нису у потпуности компатибилни са подацима о броју робота у другим земљама.

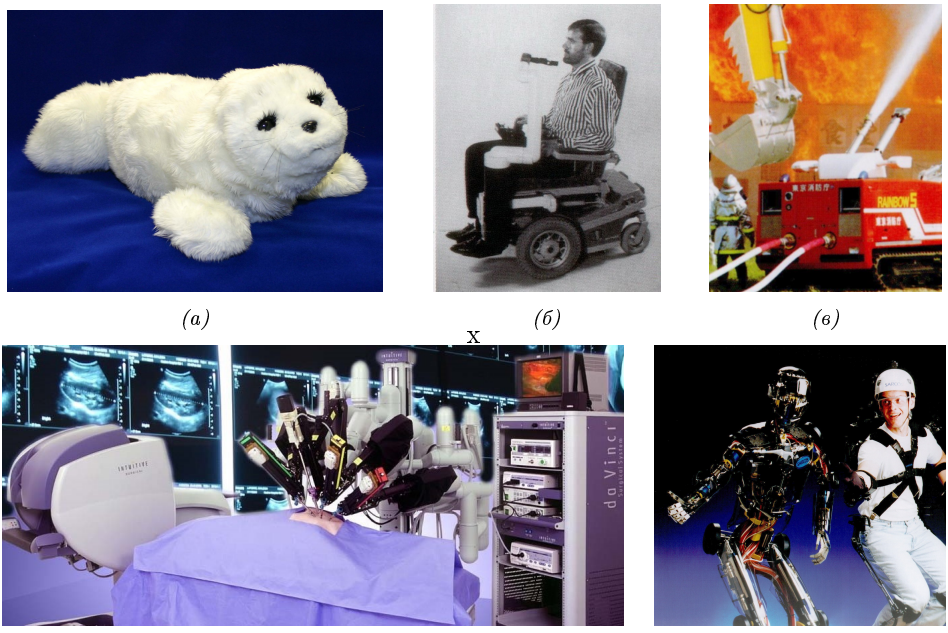
Док је у почетку развој углавном био усмерен на примену у индустрији, савремени тренутак и блиска прошлост карактерисани су наглом експанзијом развоја робота и у другим областима. Тако се појављују: роботи за домаћинство, роботи који се користе у терапеутске сврхе, роботи за негу старијих и онемоћалих особа, даљински управљани роботи за реализацију хируршких захвата, роботи за гашење пожара, роботи у индустрији забаве итд. (сл. 1.5). Неки од њих имају хуманоидни облик (сл. 1.6). Често се роботика у свим другим областима изван индустријске назива сервисном, док се, уколико роботи имају човеколики изглед, назива хуманоидном.

Размотримо детаљније развој индустријске роботике. Ако прескочимо ране фазе (појава мотора са обртним магнетним пољем и електронског рачунара), за почетак убрзаног развоја индустријске роботике пресудан је био проналазак транзистора 1947. године и интегрисаног кола 1959. године, што је омогућило минијатуризацију, повећање поузданости рада рачунара и његову примену у управљању роботима. Тиме су омогућени интензивни прорачуни приликом реализације програмираних путања, обрада сензорских информација и управљање електричним погонима. У то време је, 1961. године, Џорџу Деволу одобрен патент број УС 2988237, машине за руковање материјалом, што је представљало почетак индустријске роботике. Прва скица патента приказана је на сл. 1.7. Још у току обраде патентне пријаве, 1956. године формирана је компанија „Јунимејшн“, чији су оснивачи били Џорџ Девол и Џозеф Инглбергер. Први прототип изашао је из фабрике 1959. године и инсталисан је у ливници у власништву компаније Дженерал Моторс (енгл. Генерал Моторс - ГМ), а 1961. године почиње са сталним радом. Почетак индустријске примене робота прати и оснивање истраживачких лабораторија за област роботике при универзитетима у САД, Европи и Јапану. Наредни велики напредак у развоју

роботике омогућила је појава нових технологија за реализацију управљачких система – микрорачунара, чиме је значајно увећана способност робота да у реалном времену, поред осталог, обрађују разноврсне сензорске информације, на основу којих доносе одлуке о наредној акцији коју треба извршити и на тај начин обављају задатке смањеног степена детерминизма.

Последња велика промена у домену индустријске је могућност да робот и човек деле радни простор. При томе, карактеристике таквог робота и безбедносни стандарди су стриктно прописани техничком спецификацијом ИСО/ТС 15066:2016. Тиме је отворен пут за развој новог типа робота - колаборативних робота, који су инхерентно безбедни по човека и могу са њиме да деле радни простор. Њихова основна карактеристика јесте да могу да детектују контактну силу, и заустављају своје кретање уколико она изађе из безбедног опсега. Колаборативни роботи поједностављују поступак роботизације производње и отварју нека нова поља примене због чега удео колаборативних робота у укупном броју инсталираних индустријских робота непрестано расте.

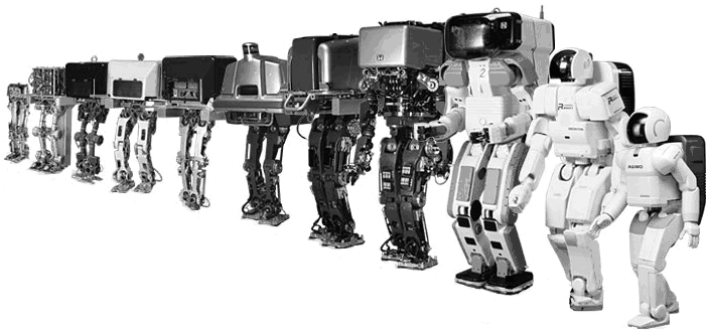
Може се очекивати да ће се развој роботике наставити посебно интензивно у областима изван индустријске роботике где је адекватна интеракција са околином на основу сензорских информација и сврсисходна акција основни предуслов успешног деловања робота. Потврда ове тврдње се огледа у појави аутономних возила. Ово је омогућено смањивање цене рачунарских компоненти, повећањем њихове моћи и развојем вештачке интелигенције.



(а) *(б)* *(в)*

(г) *(д)*

Слика 1.5: Роботи ван области индустријске роботике: а) терапеутски робот Фаро (Пхаро), б) помоћ хендикепираним особама, ц) противпожарни робот, д) помоћ при хируршким захватима, е) роботи у индустрији забаве



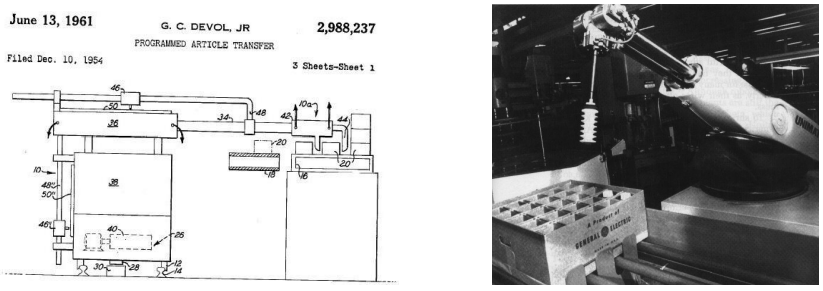
Слика 1.6: Фазе развоја хуманоидног робота Асимо (ХОНДА)

Аутономна возила су у стању да на основу сензорских информација створе модел околине у којој се налазе. На основу тог модела и познавања мапе возила су у стању да предузму одговарајућу акцију како би превезли путника или терет од почетне до циљне дестинације. Стога ће у будућности и код индустријских робота бити побољшан степен „самосталног доношења одлука“ због чега ће опасти потреба за високим степеном структуираности радног места што ће имати значајан утицај и на организацију производних система.

Када се говори о индустријској роботици, два су основна питања на која треба дати јасне одговоре. Прво је, због чега и када треба користити роботе, а друго, када не треба користити роботе.

Као одговор на прво питање уобичајено се наводе четири предности примене робота:

- побољшање квалитета производа,
- побољшање услова рада,
- смањење трошкова и
- олакшан прелазак на производњу другог производа (флексибилност).



Слика 1.7: Прва патентна пријава и први индустрсијски робот у ГМ фабрици у Трентону, 1961.

Када се разматра побољшање квалитета производа, роботи постижу боље радне резултате у односу на човека у случају када је у задатку који треба реализовати од посебног значаја: позиционирање високе тачности, висока поновљивост при понављању покрета, елиминација одступања услед замора и поуздано мерење и контрола квалитета коришћењем сензора. С обзиром да су карактеристике робота у односу на остварење високе тачности и поновљивости добро познате, прва три разлога јасна су и без додатних објашњења. Ради илустрације како се роботизацијом уз примену сензора може повећати квалитет производа навешћемо пример фирме Нисан (Ниссан) из Јапана где се за роботизовану детекцију несавршености бојене површине аутомобила користе ласерски сензори. Увођењем овог система повећана је успешност детекције грешака са 60% на 100%.

Осим тога, на раднима местима на којима је посао монотон и понављајући, на којима се јавља потреба за честим подизањем тешких предмета, уколико је радни простор контаминиран (бука, испарења, прашина, ...) или уколико посао током дугог временског периода захтева висок степен концетрације, треба размишљати о увођењу аутоматизације и роботизације. Карактеристичан пример монотоних и понављајућих покрета на радним месту јесте паковање и палетизација, док су испарења приликом бојења веома често канцерогена и контаминирају радни простор. У оба случаја примена робота представља адекватно решење. Ради илустрације радног места где се јавља потреба за подизањем тешких предмета навешћемо опет фирму Нисан која сматра да радно место треба аутоматизовати уколико током једне смене подигнут терет прелази 20 тона или уколико број понављања једне акције, током једне смене, прелази 4000. Тако је, за монтажу точкова на аутомобиле (један точак има масу од 20-30 кг) која се током једне смене реализује 1000 пута развијен посебан робот.

Када се говори о цени роботизације, поред набавне цене самог робота треба водити рачуна и о цени уређења радног места укључујући и безбедносне аспекте (морају се спречити било какви нежељени контакти робота са околином који могу довести до хаварије или повреде човека). Управо је ово један од разлога за појаву колаборационих робота на тржишту. Безбедносни аспекти уређења радног места су релаксирани и пребачени на робота и његов управљачки систем. Тиме се знатно олакшава процес роботизације производње и уређења роботске ћелије. С обзиром да робот понавља покрете веома тачно, захтев за препознавањем сцене у реалном времену може се избећи њеном високом структуираношћу. То значи да радно место треба тако уредити да се у сваком тренутку сви елементи потребни у радном процесу налазе на унапред одређеним и познатим локацијама. То се постиже коришћењем разних врста додавача, палета и сл. Да би се средства уложена у уређење радног места што пре вратила веома је пожељно да роботи раде више смена, уколико је могуће и 24 часа дневно.

Животни век производа је све краћи па се неминовно захтева скраћивање времена развоја новог производа. Осим тога, производне линије треба да буду такве да могу да се користе за производњу више од једног производа. Стога се поставља захтев за високим степеном флексибилности, који треба да буде виши не само у односу на круту аутоматизацију, већ и у односу на радне процесе које реализује човек. Тако је нпр. Ролс-Ројс (Роллс-Роуце) за 75% скратио време обраде делова хемијским нагризањем тако што се маске за покривање заштићених делова више не праве ручно, коришћењем шаблона,

већ се користе подаци из ЦАД-система. С друге стране, Нисан тренутно ради на формирању линије за производњу аутомобила на којој би било могуће производити све њихове моделе (енгл.Интеллигент Боду Ассемблу Сустем). То намеравају да постигну коришћењем једноставних робота којима би мењали приборе на линији у складу са сваким новим моделом аутомобила.

Друго, раније постављено, питање је било: када не треба користити роботе? Одговор је: онда када су предности човека у односу на робота значајне за реализацију задатка. Предности човека у односу на робота у процесу производње су следеће:

- овек има много већи број сензора који су бољег "квалитета" од оних које користе роботи. Осим тога, човек много ефикасније користи сензорске информације;
- човек може на основу сопственог искуства да доноси исправне одлуке чак и када сви потребни подаци не постоје;
- човек је веома флексибилан и може се лако прилагодити другом задатку (човек је „лак за програмирање“) ;
- човек поседује мобилност у смислу једноставног преласка са једног на друго радно место;
- ново радно место не захтева посебну припрему у смислу прилагођавања човеку (мање почетне инвестиције).

Уколико је неопходно да на одређеном радном месту извршилац поседује једну или више поменутих особина потребно је на то место поставити човека.

Да је у индустријској роботици током последње две деценије XX века, остварен значајан напредак показују и подаци које је објавила УНЕЦЕ - Унитед Натионс Ецономиц Цоммиссион фор Еуропе (Пресс Релеасе ЕЦЕ/СТАТ/04/П01, Женева, 20. Октобар, 2004.). Тако, на пример, однос неких основних економских и технолошких параметара с почетка и с краја последње деценије XX века то потврђује: номинална цена робота смањена је од 43% до 80%, број испоручених јединица увећан је за 782%, број различитих типова робота увећан је за 400%, укупна носивост увећана је за 26%, тачност позиционирања увећана је за 61%, брзина кретања последњег степена слободе увећана је за 39%, максимални дохват за 36%, средње време рада пре појаве отказа увећано је за 137% (сада износи и до 100.000 сати), величина РАМ-а увећана је за преко 400 пута итд.

Период веома значајног технолошког унапређења индустријских робота током овог периода истовремено је праћен константним растом тржишта. У томе су предњачиле Европа и САД с обзиром да је Јапан највећи део роботизације привео крају десетак година раније. На крају XX века, у свету се број робота у употреби приближио броју од 900.000±100.000 (познат је број произведених и испоручених робота али се не зна тачно колико је робота изван употребе због застарелости). Иако је препоручени радни век робота дванаест година, није редак случај да се роботи користе и после тог периода у зависности од интензитета ранијег коришћења али и од економске оправданости нове инвестиције.

Број робота у Јапану је у том тренутку износио (укључујући и најједноставније манипулаторе) 389.442, у Сједињеним Америчким Државама - 89.880, у Европској унији -198.897, остатку Европе - 10.783, Азији и Аустралији - 53.132, а у остатку света - 8.900. Број робота на 10.000 индустријских радника у појединим земљама је износио: Јапан - 272; Јужна Кореја - 125; САД - 52; ЕУ - 81; Немачка - 127; Италија - 102; Шведска - 89; Велика Британија - 34; Аустралија - 31. У аутомобилској индустрији, која је у знатно већој мери роботизована, у просеку, на 10.000 радника долази 1000 робота: у Јапану - 1.700, у Италији - 850 (највише у Европи), у САД - 590 робота, ... Интересантно је да је 2005. године наручено 59% робота антропоморфне конфигурације, 12%, цилиндричне, 8% СЦАРА конфигурације и укупно 21% свих осталих конфигурација.

Према подацима Међународне федерације роботике (ИФР) за 2019 види се да се број робота у употреби повећао на око 2,7 милиона, што значи да готово утростручио за период од петнаест година. По броју робота предњаче Азија и Аустралија са око 1,6 милона, за њима иду Европа са 580 хиљада и Америка са око 360 хиљада робота у употреби. Роботи се највише користе у аутомобилској индустрији – 930 хиљада, затим електронској индустрији – 670 хиљада и металуршкој индустрији и машиноградњи – 280 хиљада. Задаци на којима се највише примењују роботи су: руковање материјалом 1,2 милиона, заваривање 640 хиљада и монтажа 287 хиљада. Број годишњих инсталација индустријских робота је 2019. смањена са 422 хиљаде у 2018. на 373 хиљаде. Удео колаборативних робота у укупном броју инсталираних робота постепено расте, са 11 хиљада у 2017, затим 16 хиљада у 2018 на 18 хиљада у 2019, упркос паду укупаног број инсталираних индустријских робота опао.

Осим у индустријској, остварен је значајан напредак и у сервисној роботици. Пре свега појавом робота усисивача, роботи су ушли и људске домове. Због своје ниске цене и чињенице да обављају посао који људи махом не воле, овај тип робота је доживео експанзију широм света. Компанија иРобот је објавила да је 2020 године продала 30 милониту јединицу свог робота усисивача. Уз њих појавили су се на комерцијалном тржишту квадротори, који се пре свега користе за снимање, сликање и надгледање. Крајем друге деценије 21. века дошло је до стварања и огромне експанзије на тржишту аутономних возила, где сваки већи произвађач аутомобила спроводи истраживања из ове области. Нека решења су већ нашла примену на комерцијалном тржишту, као нпр. аутоматско паркирање или аутоматска вожња на аутопуту. Произвођачи аутомобила у сарадњи са великим ИТ компанијама почињу да нуде услуге аутоматског беспилотног таксирања. Поред тога сведоци смо пролиферације робота и на осталим тржиштима, као на пример, потпуно аутоматизовани роботи за кошење траве, појава роботизованих аватара, појаву робота у пољопривреди итд ...

Страх да ће роботи затворити многа радна места није се показао у потпуности оправданим. После очекиваног отпуштања на почетку роботизације у некој индустријској грани, убрзани раст обично отвара нова радна места или се, услед општег напретка друштва, отварају инвестиције у другим гранама чиме се повећава потреба за радном снагом, која при томе мора да се преквалификује. Опет, као пример можемо узети аутомобилску индустрију у којој се, у целини, и поред повремених криза, бележи константни раст броја новоотворених радних места.

Посматрано у целини, индустријска роботика већ представља нашу стварност, док са великом дозом сигурности можемо да тврдимо да ће се у ближој будућности примена различитих врста робота проширити и на остале области нашег живота.

ЛИТЕРАТУРА

Craig J., *Introduction to Robotics: Mechanics & Control,* Addison–Wesley, 1986.

Emrich M., *A New Wrinkle in Auto Body Manufacture-And Guess Who's Doing It*, Proc. of Manufacturing Systems, pp. 44-46, August 1991.

International Federation of Robotics *World Robotics 2020 - Industrial Robots*, IFR, 2020.

Koren Y., *Robotics for Engineers*, McGraw-Hill, 1985.

Kurefess T. R., *Robotics and Automation Handbook*, CRC Press LLC, 2005.

Nof S., (Ed.), *Handbook of industrial robotics,* John Wiley, 1985.

Sandin P. E., *Robot mechanisms and mechanical devices,* McGraw-Hill, Inc., 2003.

Seegräber L., *Greifsysteme für Montage, Handhabung und Industrieroboter*, Expert-Verlag, 1993.

Sekine Y., Koyama S., Imazu H., *Nissan's New Production System: Intelligent Body Assembly System*, Proc. of SAE Int. Congress and Exposition, Feb 1991, Detroit.

Selig J.M., *Introductory Robotics*, Prentice – Hall, 1992.

Siciliano B., Khatib O. (Eds.), *Springer handbook of robotics*, Springer-Verlag, 2008.

Vukobratović M., (u saradnji sa Đurović M., Hristić D., Karan B., Kirćanski M., Kirćanski N., Stokić D., Vujić D., Živković V.), *Uvod u robotiku, Institut Mihajlo Pupin,* Beograd, 1988.

Xie Ming, *Fundamentals of robotics: linking perception to action*, World Scientific Publishing, 2003.

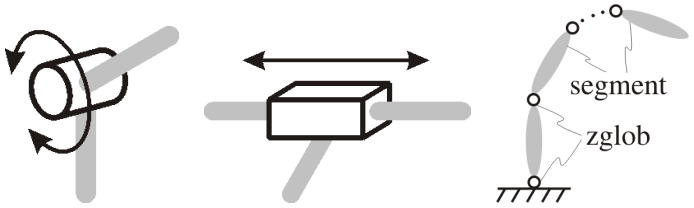
Yamauchi Y., *Application and evaluation of robots in Nissan*, Proc. of Automotive Manufacturing International '93, pp 73-81, 1993.

2. ДЕФИНИЦИЈЕ ОСНОВНИХ ПОЈМОВА И ОСНОВНЕ КОНФИГУРАЦИЈЕ ИНДУСТРИЈСКИХ РОБОТА

У овом поглављу уводе се основни појмови и дефиниције везани за индустријску роботику и објашњавају се основне конфигурације индустријских робота.

2.1 ДЕФИНИЦИЈЕ ОСНОВНИХ ПОЈМОВА

Механичка структура индустријског робота се састоји од сегмената спојених зглобовима који могу бити ротациони или линеарни (транслаторни). Механичка конструкција треба да омогући остваривање потребног кретања хватаљке робота током реализације радног задатка. То значи да је потребно да хватаљка у свакој тачки путање оствари планирану позицију и оријентацију, као и одговарајућу брзину и убрзање. Конструкциона реализација зглобова који се данас примењују код индустријских робота је таква да један зглоб омогућава само једно релативно кретање сегмената које повезује (сл. 2.1). Једно кретање које зглоб дозвољава (трансласлација или ротација), по аналогији са терминологијом у механици, назива се једним степеном слободе (СС). Према томе, зглоб који омогућава само једно релативно кретање има један степен слободе и назива се једноструким. Стога се може рећи да се механичка структура робота састоји од више сегмената који су повезани једноструким зглобовима. Сложена просторна кретања врха робота остварују се истовременим и усклађеним кретањем више зглобова. Нумеричке вредности позиција зглобова се, без обзира да ли се ради о ротационим или линеарним зглобовима, називају унутрашњим координатама.



(а) *(б)* *(в)*

Слика 2.1: Схематски приказ а) ротационог и б) транслаторног зглоба и ц) кинематског ланца

С обзиром да је за достизање произвољно задате позиције и оријентације крутог тела у простору потребно шест степени слободе (три транслације дуж оса координатног система и три ротације око њих) јасно је да механичка структура робота, која треба да обезбеди позиционирање врха робота у било којој тачки свог радног простора са произвољном оријентацијом, мора да има шест једноструких, одговарајуће спрегнутих, зглобова. На тај начин механичка структура робота обезбеђује шест степени слободе кретања врха робота. Стога је јасно да, када је реч о механичкој структури са шест одговарајуће спрегнутих степени слободе, за произвољно задату позицију

и оријентацију хватаљке у простору постоји решење (скуп вредности координата зглобова) које обезбеђује да хватаљка буде у задатој позицији са траженом оријентацијом. У случају да механичка структура има више од шест степени слободе постоји више могућих положаја зглобова (теоретски, бесконачно много) са којима се остварују тражена позиција и оријентација хватаљке. Роботи чија механичка структура има више од шест, просторно распоређених, зглобова (степени слободе) увек су *редундантни*[1]. Треба уочити да се редундантност дефинише као разлика у броју степени слободе које захтева реализација радног задатка и броја степени слободе који поседује механичка структура робота. Ако робот поседује „вишак“ степени слободе за одређени задатак, он је за тај задатак редундантан. У супротном случају робот није редундантан. Према томе, за неки задатак робот који има шест или мање степени слободе може, док за неки други задатак не мора бити редундантан. По правилу, индустријски роботи имају шест, мада се на тржишту већ појављују реализације које имају и више СС[2].

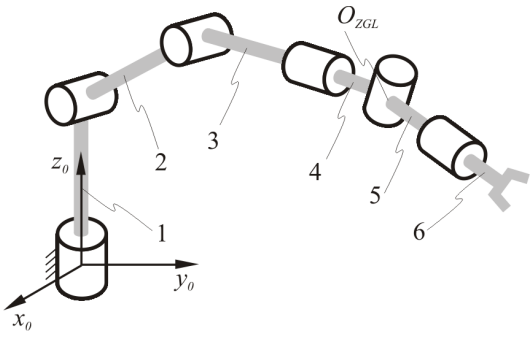
Део простора у коме се хватаљка[3] робота може наћи назива се радним простором (*енгл.* воркспаце). Облик радног простора зависи од врсте (ротациони или транслаторни) и распореда зглобова минималне конфигурације, димензија сегмената и опсега кретања сваког зглоба. *Потпуно оперативним радним простором* (*енгл.*версатиле воркспаце) назива се радни простор у оквиру којег се може у свакој тачки остварити било која оријентација хватаљке. *Максималним радним простором* називамо део простора у оквиру којег робот може да дохвати сваку тачку макар само са једном оријентацијом хватаљке. Јасно је да је максимални радни простор већи од потпуно оперативног радног простора и да се у зонама које су ближе граничним областима смањује опсег могућих оријентација хватаљке које робот може да постигне. Тачке које су на граничној спољној површини радног простора робот може да дохвати само са потпуно испруженом механичкон структуром па је јасно да у тим тачкама није могуће остварити произвољну оријентацију хватаљке. Додатна разматрања везана за радни простор су дата у одељку 2.3.

Као што смо већ рекли, механичка структура индустријског манипулационог робота се састоји од сегмената који су спојени зглобовима. Први зглоб, посматрано од основе, повезан је за подлогу, док је на последњи сегмент причвршћена хватаљка. Укупна механичка конфигурација уобичајено се дели на две целине: прва три сегмента (посматрано од подлоге) са припадајућим

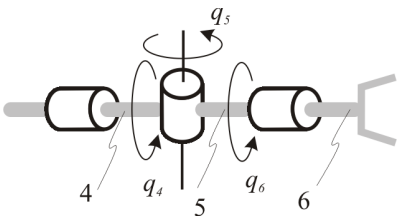
[1] Људска рука има седам степени слободе и редундантна је. Да би се лакше схватио појам и значај редундантности наслоните длан на неки непокретан објекат из ваше околине, нпр. зид. Обезбеђујући да се труп и длан не померају, део руке између длана и рамена може заузети више положаја. Стога је јасно да нам редундантност даје слободу да захтевану позицију и оријентацију хватаљке остваримо са више положаја механичке структуре, тј. можемо да одаберемо положај који нам највише одговара. Треба напоменути да се у литератури могу пронаћи различите дефиниције редундантности. Интересантна дискусија се може наћи у раду Е. С. Цонкур, Р. Буцкингхам: „Цларифуинг тхе дефинитион оф редунданцу ас усед ин роботицс“, Роботица (1997) Вол. 15, пп 583–586.

[2] Firma Motoman je juna 2008. godine predstavila dvoručni model SDA10 (vidi sl. 7.1). Robot ukupno ima 15 SS (svaka „ruka“ ima po 7 SS plus rotacija centralnog stuba), nosivost svake ruke je po 10 kg, ponovljivost je ±0,1 mm. Obe ruke mogu da rade sinhrono na istom zadatku, ali se svakom rukom može upravljati i nezavisno.

[3] На врху минималне конфигурације робот може да носи хватаљку или алат (*енгл.* енд-ефпецтор). У недостатку термина на српском језику који обухвата обе врсте уређаја користићемо само израз хватаљка.



Слика 2.2: Пример кинематске схеме једне механичке конфигурације. Зглобови 1, 2 и 3 чине минималну конфигурацију, а зглобови 4, 5 и 6 зглоб хватаљке. Осе зглобова 4, 5 и 6 секу се у тачки O_{ZGL}



Слика 2.3: Кинематска схема зглоба хватаљке где се све три осе секу у једној тачки (Ојлеров зглоб).

зглобовима називају се *минималном конфигурацијом*, док остала три зглоба чине *зглоб хватаљке* (сл. 2.2). Адекватним избором углова минималне конфигурације хватаљка се позиционира у жељену тачку радног простора, док 3 СС зглоба хватаљке обезбеђују захтевану оријентацију.

Целина коју формирају последња три зглоба у кинематском ланцу механичке структуре робота назива се зглобом хватаљке. Уобичајено је да су сва три зглоба ротациона (сл. 2.3) и да су реализовани тако да се све три осе секу у једној тачки (тачка O_{ZGL} на сл. 2.2 која се условно може сматрати центром зглоба). Ова тачка остаје непокретна за било коју вредност углова у зглобовима 4, 5 и 6. Оваква конструкција назива се Ојлеровим зглобом. Уколико се тачка O_{ZGL} адекватно позиционира у радном простору, избором одговарајућих углова у зглобовима хватаљке обезбеђује се потребна оријентација хватаљке. С обзиром да се зглоб хватаљке директно надовезује на минималну конфигурацију, важно је да се напомене да се тачка O_{ZGL} не помера у односу на последњи сегмент минималне конфигурације (сл. 2.2). Ова чињеница ће на погодан начин бити искоришћена касније код распрезања механичке структуре при решавању инверзног кинематског задатка. Механичка структура је, обично, једноструки кинематски ланац, мада се могу наћи примери вишеструких кинематских ланаца. Вишеструким ланцима се, углавном реализује пренос кретања са мотора на зглоб уколико је мотор удаљен од зглоба који оснажује тј. није директно повезан на осовину зглоба механичке структуре. То се најчешће односи на моторе којима је оснажен зглоб хватаљке.

Роботски манипулациони систем (сл. 2.4) минимално се састоји од:

- механичке конфигурације оснажене актуаторима;
- одговарајућег управљачког уређаја (контролера) за управљање кретањем извршних органа, који се обично налази у истом кућишту са енергетским делом система за напајање актуатора;
- уређаја за ручно навођење робота, који се често назива уређајем за обучавање (*енгл.*теацхинг бох или теацх пендант) тј. програмирање



Слика 2.4: Комплетан систем манипулационих робота (механичка конфигурација, управљачки уређај и уређај за ручно навођење)

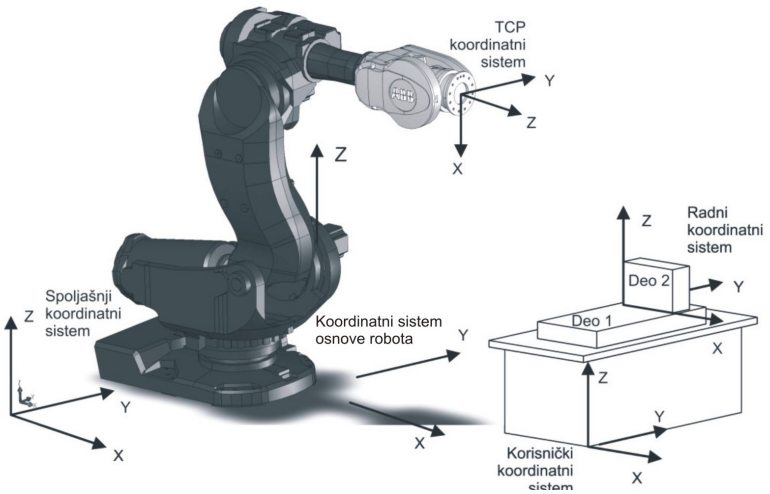
робота.

На сл. 2.4 приказана су два примера роботских система и у оба случаја се виде све три поменуте компоненте које у појединачним случајевима могу да варирају по величини и облику. Код роботског система могу постојати још неки додатни елементи као што су нпр. извор уља под притиском за робот са хидрауличним актуаторима или периферијска јединица за уношење програма који је развијен на неком другом уређају.

2.2 ДЕФИНИЦИЈА ОСНОВНИХ КООРДИНАТНИХ СИСТЕМА

За успешну примену робота неопходан је, у што већој мери, општи и стандардизован начин приказа информација које су значајне и за робот и за задатак. То се постиже коришћењем координатних система који се придружују свим сегментима робота и релевантним објектима из његове околине. У односу на основни (спољашњи) координатни систем (*енгл.* ворлд цоординатес) дефинише се глобални положај робота и радног места (сл. 2.5). Глобални положај робота описује се положајем координатног система основе робота (*енгл.* басе цоординатес). Спољашњи координатни систем и координатни систем основе робота су непокретни и не мењају свој положај током кретања робота. Положај хватаљке (или алата) дефинише се координатним системом чији се координатни почетак поставља у посебну тачку, карактеристичну за дати алат или хватаљку. Уобичајено је да се за ову тачку користи скраћеница ТЦП (*енгл.* Тоол Центер Поинт), па ћемо је и ми користити. За сваки робот произвођач дефинише један основни ТЦП који се налази на последњем сегменту мехничке конфигурације и независан је од алата који робот носи. Поред тога могу се додати координатни системи у карактеристичним тачкама алата и њихов положај се дефинише у односу на основни ТЦП.

У случају робота који је приказан на сл. 2.5, координатни систем основе је постављен тако да је оса Z паралелна са осом првог зглоба робота, X оса је управна на њу, док се оса Y бира тако да формира десни координатни систем. У ТЦП је координатни систем постављен тако да је Z оса коаксијална са осом



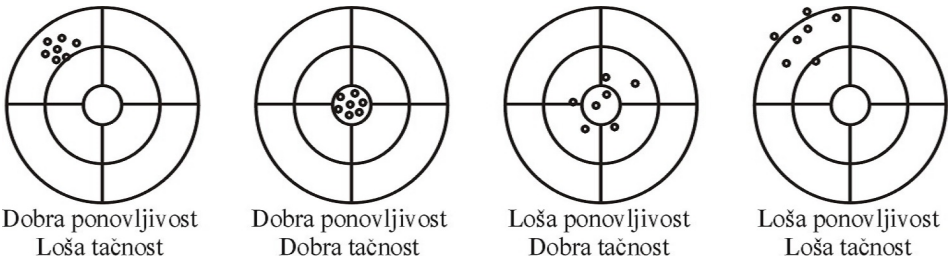
Слика 2.5: Основни координатни системи радног места и робота

шестог зглоба робота, X оса је нормална на раван радног стола, а Y оса је опет изабрана тако да чини десни координатни систем са X и Z осама. Координатни систем којим се дефинише положај радног предмета се назива координатни систем објекта (*енгл.* објецт цоординате сустем). Поједини произвођачи робота уводе и посебно дефинишу и друге координатне системе (нпр. АББ уводи кориснички координатни систем (енг.усер цоординате фраме)) којима се олакшава програмирање робота у сложеним задацима.

2.3 ОСНОВНИ РАДНИ ПАРАМЕТРИ ИНДУСТРИЈСКИХ РОБОТА

Најважнији параметари робота су: поновљивост и тачност (сл. 2.6), резолуција, величина радног простора, као и расподела носивости у оквиру радног простора. *Поновљивост* је растојање између два положаја[4] одабране тачке врха робота (рецимо ТЦП-а) који се добијају на следећи начин. Прва позиција одабране тачке се добија довођењем робота у жељени положај у простору након чега се запамте вредности углова у његовим зглобовима. Друга позиција се добија одвођењем робота у неки други положај и задавањем команде да се врати у првобитни положај (који одговара запамћеним вредностима углова у зглобовима). Грешка остварених положаја одабране тачке се назива *поновљивошћу*. Другим речима, уколико се робот доведе у одређену тачку радног простора у којој се запамте унутрашње координате, затим се из те тачке изведе, па му се изда команда да се врати у исту тачку, грешка позиционирања у односу на тачку у којој је претходно био се назива поновљивошћу. Према томе, поновљивост је растојање између остварeног и жељеног положаја одабране тачке врха робота уколико се робот у жељеном положају претходно налазио и уколико су унутрашње координате које том положају

[4]Координате ове тачке су изражене у односу на непокретни координатни систем (глобални или координатни систем базе робота).



Слика 2.6: Илустрација тачности и поновљивости

одговарају биле запамћене. Поновљивост се дефинише као полупречник сфере који обухвата све тако достигнуте положаје. *Тачност* је растојање између оствареног и задатог (командованог) положаја врха робота уколико робот у командованом положају није претходно био[5]. Роботи имају и за ред величина бољу поновљивост од тачности. *Резолуција* је најмање могуће кретање робота које се може задати. Величина резолуције је последица ограниченог броја битова дигиталног управљачког система робота. Ради значаја јасног схватања још једном ћемо објаснити разлику између појмова тачности и поновљивости робота.

Када се врх робота већ налази у некој тачки радног простора могу се запамтити вредности координата у зглобовима (за ротационе зглобове то су углови, за транслаторне су то линеарна издужења) којима одговарају тренутни положаји сегмената. Када се врх робота изведе из те позиције, и зада команда да поново оде у исту тачку (вредности координата у зглобовима које треба остварити су познате) добијена разлика у позиционирању врха се назива поновљивошћу. Уколико се роботу командује да се премести у положај тако да његов врх заузме одређену позицију (у којој претходно није био) робот нема информацију о координатама у зглобовима који тој позицији одговарају и управљачки уређај робота мора да их „срачуна“ на основу кинематског модела који поседује. Грешка позиционирања је у овом случају додатно индукована одступањем параметара модела од стварних параметара робота и назива се тачношћу. Ради повећања тачности робота развијени су разни калибрациони поступци помоћу којих се одступања стварних параметара робота од параметара који управљачки уређај робота користи минимизирају. Поновљивост при томе остаје непромењена.

Већ раније смо рекли да се сам радни простор може даље делити на максимални и потпуно оперативни у зависности од могућности приступања свакој његовој тачки са произвољном оријентацијом хватаљке. У случају да је потребно водити рачуна о одржавању жељене тачности положаја под оптерећењем (сл. 2.7), радни простор се може додатно поделити на “подпросторе” којима се приписују одговарајуће вредности носивости робота.

Тако је радни простор при највећој носивости (а да је и даље обезбеђена

[5]С обзиром да робот није претходно био у положају у који се шаље, координате у зглобовима које одговарају командованом положају се морају израчунати на основу кинематског модела робота. Одступања параметара стварног робота од параметара кинематског модела представља основни узрок појаве грешке позиционирања која се назива тачношћу.

жељена тачност позиционирања) далеко мањи од радног простора неоптерећеног манипулационог робота. Врло често се у подацима произвођача, само наводи податак о величини радног простора неоптерећеног робота, а тек се на основу посебних захтева даје информација о величина и облику радног простора под делимичним или максималним оптерећењем.

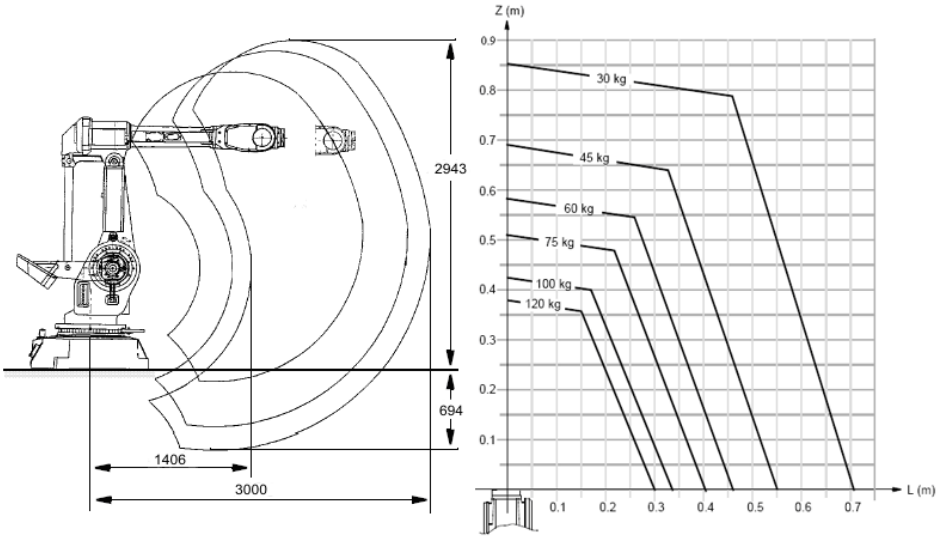
Често се радни простор који одговара одређеној тачности позиционирања у комбинацији са носивошћу робота приказује путем фамилије кривих за приближне вредности носивости робота у вертикалној равни. Ове криве су одређене за максималну вредност момента инерције по било којој од три осе ТЦП координатног система у тежишту објекта који робот носи. Са сл. 2.7 се види да је у конкретном примеру носивост на спољашњим границама радног простора смањена за 70% у односу на унутрашње границе.

2.4 ОСНОВНЕ МЕХАНИЧКЕ СТРУКТУРЕ (КОНФИГУРАЦИЈЕ) ИНДУСТРИЈСКИХ РОБОТА

У литератури се могу пронаћи разни начини систематизације индустријских манипулационих робота. Овде је усвојена систематизација која се базира на типу и просторном распореду прва три зглоба рачунато од подлоге. Овај део механичке структуре робота називамо минималном конфигурацијом. У наредним одељцима ће бити приказане основне механичке структуре индустријских робота.

2.4.1 Робот антропоморфне конфигурације

Код већине роботских конфигурација, па и код ове, први степен слободе (посматрано од подлоге) је ротациони и оса првог зглоба је вертикална. Тиме



Слика 2.7: Пример промене максимално дозвољеног оптерећења на прирубници хватаљке на различитим позицијама у оквиру радног простора

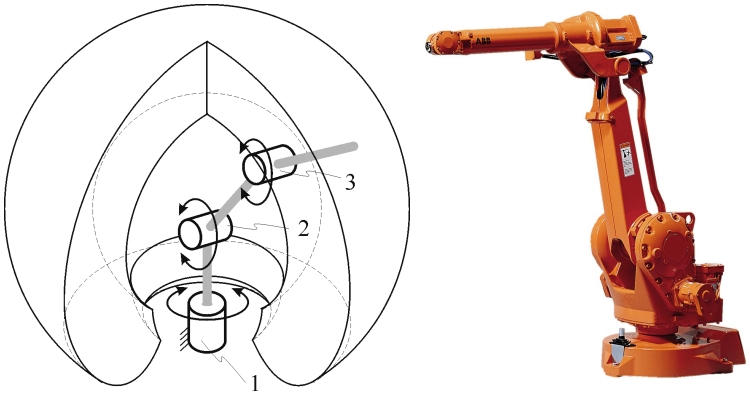
је омогућена ротација комплетног робота око вертикалне осе. Осе другог и трећег зглоба су међусобно паралелне, хоризонталне и управне на осу првог зглоба. Кретањем другог и трећег зглоба се обезбеђује да се врх минималне конфигурације позиционира у произвољну тачку у вертикалној равни која садржи осу првог зглоба. У зависности од опсега кретања зглобова, у овој равни се може одредити контура у којој врх минималне конфигурације може да се нађе. Ротацијом ове контуре око осе првог зглоба се дефинише радни простор робота.

Скица кинематске структуре, радног простора и фотографија робота антропоморфне конфигурације су приказани на сл. 2.8. Механичка структура робота антропоморфне конфигурације подсећа на структуру руке човека па се стога за други сегмент минималне конфигурације често користи назив надлактица, а за трећи подлактица (сл. 2.8). Основна карактеристика робота антропоморфне конфигурације је да може да пређе изнад препреке која му се нађе на путу. Ако погледамо кинематску схему ове конфигурације јасно је да положај нпр. трећег зглоба утиче на интензитет момента око осе другог зглоба чак и у случају да се овај зглоб не помера. Овај утицај се назива спрезањем. Стога се каже да, уколико положај (или кретање) једног зглоба утиче значајно на погонске моменте (или погонске силе уколико су зглобови транслаторни) других зглобова, посматрана конфигурација има значајно спрезање међу зглобовима. Роботи антропоморфне конфигурације су карактеристични по томе што имају велико спрезање међу зглобовима.

2.4.2 Робот сферне (поларне) конфигурације

І код сферне конфигурације оса првог зглоба је вертикална док је оса другог хоризонтална и управна на осу првог зглоба. Трећи зглоб је транслаторан. Према томе, код сферне конфигурације врста и распоред прва два зглоба су истоветни као код антропоморфне.

Кинематска схема сферне конфигурације је приказана на сл. 2.9. Као и раније, други и трећи зглоб омогућавају позиционирање врха минималне конфигурације у било којој тачки вертикалне равни, док се ротацијом вертикалне равни око осе првог зглоба врх робота може позиционирати било где у оквиру



Слика 2.8: Кинематска схема, скица радног простора и фотографија робота антропоморфне конфигурације.

радног простора.

Ова конфигурација названа је сферном јер је радни простор део сфере, а поларном с обзиром да угао ротације другог зглоба и издужење трећег зглоба одговарају поларним координатама. Пошто је трећи зглоб транслаторан, прилаз радном месту треба да буде без препрека с обзиром да их робот ове конфигурације не може заобићи.

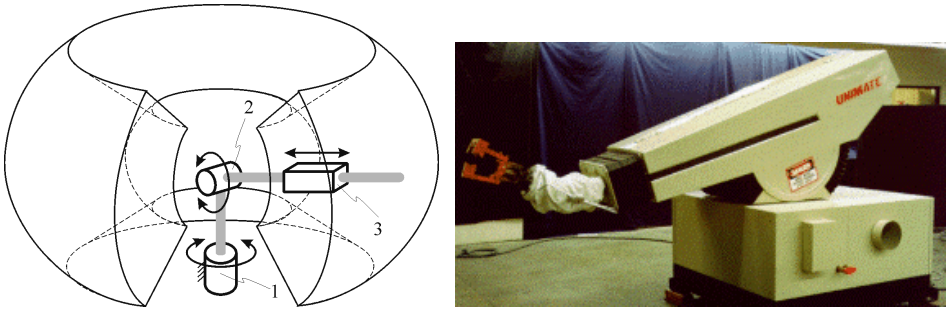
2.4.3 Робот цилиндричне конфигурације

Минимална конфигурација робота цилиндричне конфигурације има један ротациони и два транслаторна зглоба (сл. 2.10). І код ове, као и код претходних конфигурација, први сегмент представља обртни стуб око вертикалне осе па је први зглоб ротациони и постављен на исти начин као и у претходним конфигурацијама. Други и трећи зглоб су транслаторни (линеарни). Оса другог зглоба је вертикална, што значи да се његовим кретањем подиже односно спушта део структуре робота који се налази даље од зглоба, према врху минималне конфигурације. Оса трећег зглоба је хоризонтална тако да се његовим покретањем примиче односно одмиче хватаљка у односу на вертикални стуб робота. Ова конфигурација се назива цилиндричном према облику радног простора који представља део цилиндра. Роботи ове конфигурације имају веома мало спрезање међу зглобовима.

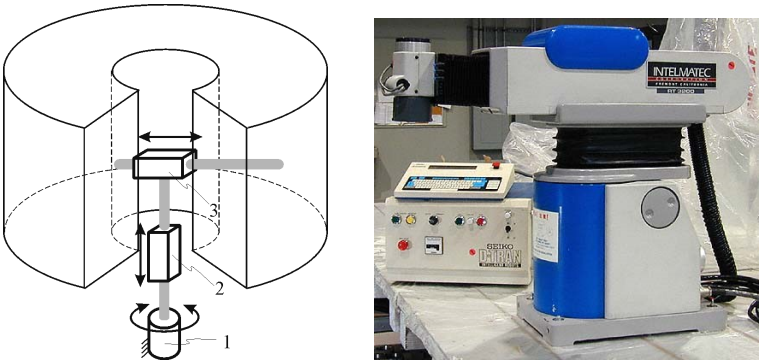
2.4.4 Робот Сцара конфигурације

Роботи СЦАРА конфигурације (*енгл.* Селецтиве Цомплианце Ассемблу Робот Арм), имају два ротациона и један транслаторни зглоб. Два међусобно паралелна ротациона зглоба са вертикалним осама обртања су постављени на стубну основу тако да се оба сегмента крећу у хоризонталној равни. На крају другог сегмента се налази транслаторни зглоб чија је оса такође вертикална (сл. 2.11). Зглоб хватаљке има најчешће само један степен слободе и то обртање око вертикалне осе. Према томе, роботи СЦАРА конфигурације уобичајено имају само четири степена слободе.

Кретањем ротационих зглобова сегмент са транслаторним зглобом који носи хватаљку позиционира се изнад жељене тачке у хоризонталној равни, па се хватаљка доводи до жељеног положаја транслаторним померањем надоле.



Слика 2.9: Кинематска схема, скица радног простора и фотографија робота сферне (поларне) конфигурације.

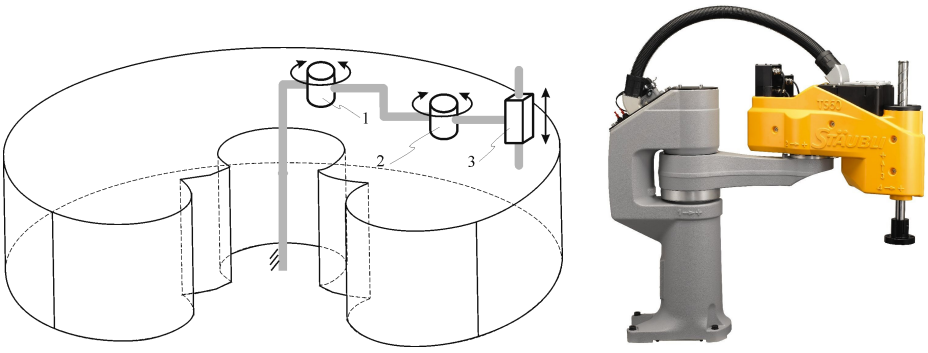


Слика 2.10: Кинематска схема, скица радног простора и фотографија робота цилиндричне конфигурације

Роботи СЦАРА конфигурације су први пут реализовани у Јапану 1972. године и углавном су били намењени за постављање електронских компоненти на штампане плоче ради лемљења. Њихова примена је касније проширена и на друге задатке. СЦАРА конфигурација има веома мало спрезање међу зглобовима с обзиром да гравитационо оптерећење услед тежине сегмената и радног предмета у потпуности прима сама механичка структура зглобова тако да моторима треба да се савлада само оптерећење услед кретања. Одликују се великом тачношћу позиционирања и брзином рада, као и релативно великом носивошћу. Највећи недостатак СЦАРА робота потиче од његове конструкције – постављен је високо (заузима велики део простора изнад радне површине) и приступ радној површини одозго мора да буде слободан.

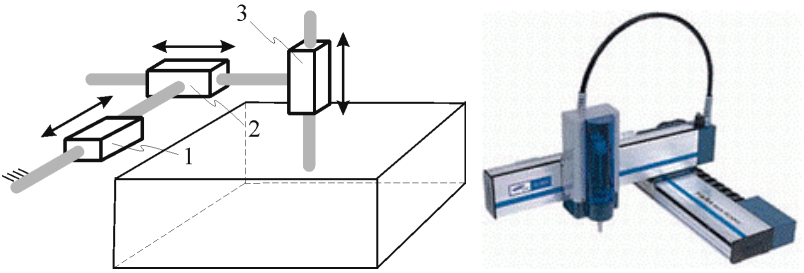
2.4.5 Робот декартове (правоулге) конфигурације

Минималну конфигурацију код ових робота (сл. 2.12) чине три транслаторна зглоба чије су осе међусобно управне као код Декартовог правоуглог координатног система. Одатле потиче и назив овакве конфигурације (може се срести још неколико назива: правоугла, картезијанска (*енгл.* Цартесиан) или



Слика 2.11: Кинематска схема, скица радног простора и фотографија робота СЦАРА конфигурације.

портална (*енгл.* гантру) конфигурација уколико се робот постави на постоље којим се надноси над радни простор којем приступа одозго). С обзиром на врсту и распоред зглобова код робота ове конфигурације јасан је утицај кретања сваког од зглобова на кретање хватаљке, чиме је програмирање, па чак и ручно навођење знатно олакшано. Радни простор представља паралелопипед чије димензије зависе од опсега кретања сваког зглоба. Роботи ове конфигурације имају веома мало спрезање међу зглобовима.



Слика 2.12: Кинематска схема, скица радног простора и фотографија робота правоугле конфигурације.

Ради смањења заузетог простора у погону роботи овакве конфигурације се веома често постављају на постоље (сл. 2.13) којим се издижу изнад радне машине (портални или *енгл.* гантру робот). Наравно, у оваквим случајевима приступ радном простору радне машине мора бити слободан одозго. Димензије постоља могу бити такве да робот може да опслужује и по неколико машина.

2.4.6 Паралелни роботи

Све досада описане конфигурације су имале основну форму једноструког кинематског ланца, а само су се разликовале врста и диспозиција зглобова. Паралелни роботи се конструкционо суштински разликују и овде неће бити детаљније изучавани, већ само поменути. У основи, паралелни роботи представљају две платформе које су повезане тако да се растојање између одговарајућих зглобова може мењати. Промена растојања између зглобова на платформама се може реализовати или телескопским сегментима са транслаторним зглобовима или двосегментним елементима са ротационим зглобовима као што је приказано на сл. 2.14.

У номиналном положају ове платформе су паралелне. Једна платформа се сматра базом или основом (на сл. 2.14 је то горња платформа која треба да се причврсти за непокретно постоље), а друга је радна чијим положајем и оријентацијом се управља и на њој се налази хватаљка или алат. Променом растојања између одговарајућих зглобова на базној и радној платформи мења се положај и оријентација радне платформе, а тиме и хватаљке или алата који робот носи.

Роботи ове конфигурације одликују се изузетном агилношћу (брзином кретања при преласку из једног положаја у други), великом крутошћу држања положаја и релативно малом масом у односу на носивост[6]. Врло су

[6]С обзиром да су актуатори којима се врши покретање свака од „руку“ причвршћени за базну платформу и да се не крећу, као и да свака „рука“ носи само трећину оптерећења (код



Слика 2.13: Робот правоугле конфигурације постављен на постоље (портални.

погодни за реализацију паковања, сортирања и сличне задатке.

робота који имају једноструки кинематски ланац сваки сегмент трпи целокупно оптерећење) могуће је постићи да сегменти „руку“ буду знатно лаганији.



Слика 2.14: Фотографије робота паралелне конфигурације

ЛИТЕРАТУРА

Angeles J., *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems - Theory, Methods and Algorithms*, Springer-Verlag, 2003.

Craig J., *Introduction to Robotics: Mechanics & Control,* Addison–Wesley, 1986.

Fu K., Gonzales R., Lee C., *Robotics: Control, Sensing, Vision and Intellignece*, McGraw-Hill, 1987.

Merlet J. P., *Parallel Robots*, Kluwer, 2000.

Nof S., (Ed.), *Handbook of industrial robotics,* John Wiley, 1985.

Rivin E. I., *Mechanical design of robots*, McGraw-Hill, 1987.

Sciavicco L., Siciliano B., *Modeling and Control of Robot Manipulators*, McGraw-Hill, 1996.

Selig J.M., *Introductory Robotics*, Prentice – Hall, 1992.

Siciliano B., Khatib O. (Eds.), *Springer handbook of robotics*, Springer-Verlag, 2008.

Vukobratović M., (u saradnji sa Đurović M., Hristić D., Karan B., Kirćanski M., Kirćanski N., Stokić D., Vujić D., Živković V.), *Uvod u robotiku, Institut Mihajlo Pupin,* Beograd, 1988.

Koren Y., *Robotics for Engineers*, McGraw-Hill, 1985.

3. КИНЕМАТСКИ МОДЕЛ РОБОТА I: ПОЛОЖАЈ И ОРИЈЕНТАЦИЈА СЕГМЕНАТА РОБОТА У ПРОСТОРУ

Како је већ речено, роботски механизам се може представити системом крутих тела спојених зглобовима који називамо кинематским ланцем. Ради математичког описа кретања сегмената који симултаним кретањем одређују кретање хватаљке, на сваки сегмент се, према одређеним правилима, поставља координатни систем који се креће заједно са њим. Пошто сваки од зглобова допушта само једно релативно кретање, положај хватаљке је резултат низа сукцесивних ротационих или транслаторних трансформација над координатним системима. У овој глави се описују елементарне трансформације и уводи се појам хомогених трансформација које у оквиру исте матрице обједињују ротацију и транслацију.

На тај начин је могуће, познавајући геометријске карактеристике робота и тренутне величине углова у зглобовима, једнозначно одредити положај и оријентацију последњег сегмента (тј. њему припадајућег координатног система) робота у односу на почетни. Обрнут задатак, одређивање вредности углова или помераја у зглобовима (унутрашњих координата) тако да хватаљка буде у тачно одређеној позицији и са жељеном оријентацијом је много сложенији и није увек једнозначно решив.

3.1 КООРДИНАТНИ СИСТЕМ И ЊИХОВЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

Нека су два десна координатна система $O_0 - x_0y_0z_0$ и $O_1 - x_1y_1z_1$ који се не поклапају спојени само координатним почецима (сл. 3.1), и нека су им ортови дати са ($\mathbf{i}_0$ $\mathbf{i}_0$ $\mathbf{j}_0$ $\mathbf{k}_0$) и ($\mathbf{i}_1$ $\mathbf{j}_1$ $\mathbf{k}_1$), респективно. Систем $O_0 - x_0y_0z_0$ ћемо сматрати непокретним. Вектор који полази из координатног почетка (сл. 3.1) и досеже до неке тачке P (обележимо га са $\mathbf{p}$), можемо изразити у односу на било који од два посматрана координатна система. Вектор $\mathbf{p}$ изражен у односу на непокретни (базни) координатни систем $O_0 - x_0y_0z_0$ је дат са:

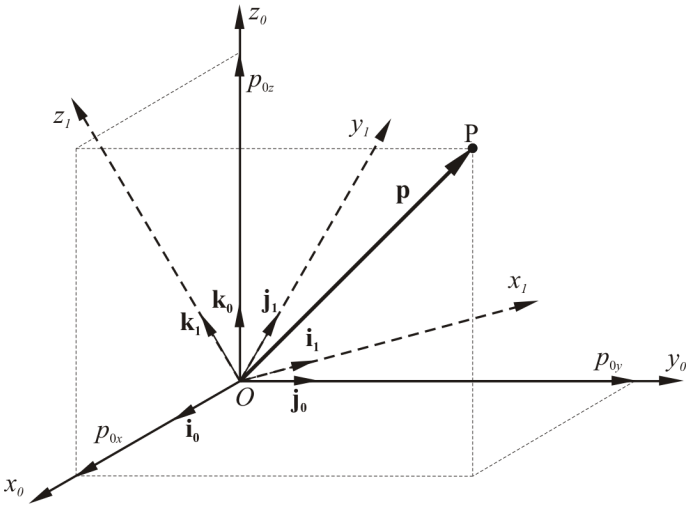
$$\mathbf{p}_o = p_{ox} \cdot \mathbf{i}_o + p_{oy} \cdot \mathbf{j}_o + p_{oz} \cdot \mathbf{k}_o \tag{3.1}$$

док изражен у односу на координатни систем $O_1 - x_1y_1z_1$ постаје:

$$\mathbf{p}_1 = p_{1x} \cdot \mathbf{i}_1 + p_{1y} \cdot \mathbf{j}_1 + p_{1z} \cdot \mathbf{k}_1. \tag{3.2}$$

Без обзира у ком координатном систему је изражен вектор $\mathbf{p}$ (реч је о приказу истог вектора у различитим координатним системима) за неку његову компоненту нпр. у x правцу можемо писати:

$$\begin{aligned} p_{0x} &= \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{i}_0 = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{i}_0 \\ p_{0x} &= p_{1x} \cdot \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_0 + p_{1y} \cdot \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_0 + p_{1z} \cdot \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_0 \end{aligned} \quad . \tag{3.3}$$



Слика 3.1: Координатни системи ротирани око координатног почетка

Сличне релације се могу успоставити и за компоненте у преостала два правца, y и z

$$p_{0y} = p_{1x} \cdot \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_0 + p_{1y} \cdot \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_0 + p_{1z} \cdot \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_0 \tag{3.4}$$

$$p_{0z} = p_{1x} \cdot \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_0 + p_{1y} \cdot \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_0 + p_{1z} \cdot \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_0 \tag{3.5}$$

Сва три израза (3.3 - 3.5) можемо написати у компактној матричној форми

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{p}_1 \tag{3.6}$$

где $\mathbf{R}_0^1$ дефинише релативно угаоно одступање координатних система $O_0 - x_0y_0z_0$ и $O_1 - x_1y_1z_1$.

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_0 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_0 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_0 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_0 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_0 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_0 \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Матрица $\mathbf{R}_0^1$ се назива матрицом ротације. Из (3.7) се види да колоне матрице $\mathbf{R}_0^1$ представљају пројекције ортова координатног система $O_1 - x_1y_1z_1$ на систем $O_0 - x_0y_0z_0$, а врсте пројекције ортова координатног система $O_0 - x_0y_0z_0$ на систем $O_1 - x_1y_1z_1$, На сличан начин као у изразима (3.3 - 3.5), изражавајући компоненте вектора $\mathbf{p_1}$ преко вектора $\mathbf{p_0}$ можемо написати

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_1^0 \cdot \mathbf{p}_0 \tag{3.8}$$

где је

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}_1 & \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}_1 \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

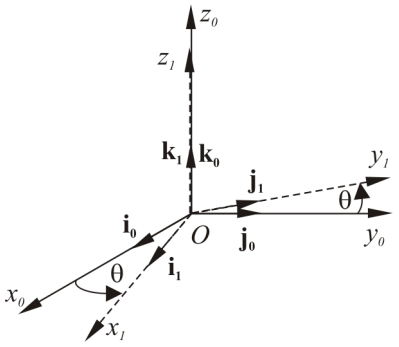
Матрице $\mathbf{R}_0^1$ и $\mathbf{R}_1^0$ представљају једна у односу на другу инверзне трансформације. С обзиром да је скаларни производ вектора ($\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}_0 = \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}_0$) комутативан лако се може показати да важи

$$\mathbf{R}_1^0 = (\mathbf{R}_0^1)^{-1} = (\mathbf{R}_0^1)^T \tag{3.10}$$

Матрице за које важи (3.10) називају се ***ортогоналним***. Вектори колоне у $\mathbf{R}_0^1$ су јединичне дужине и међусобно су ортогонални. У случају десног координатног система детерминанта матрице $\mathbf{R}_0^1$ има вредност $+1$. Ортогоналне матрице чија детереминанта има вредност 1 називамо матрицама ротације. Према томе, можемо да ***закључимо да су матрице ротације*** $\mathbf{R}$ ортогоналне.

3.1.1 Елементарне Ротације

Размотримо ротације координатног система $O_0 - x_0y_0z_0$ око његових координатних оса. Позитивним смером ротације сматрамо ротацију у позитивном математичком смеру. Прво ћемо анализирати ротацију координатног система око z осе. После ротације за угао θ (сл. 3.2) координатни систем $O_0 - x_0y_0z_0$ се премешта у нови положај обележен са $O_1 - x_1y_1z_1$.



Слика 3.2: Ротација координатног система око z осе

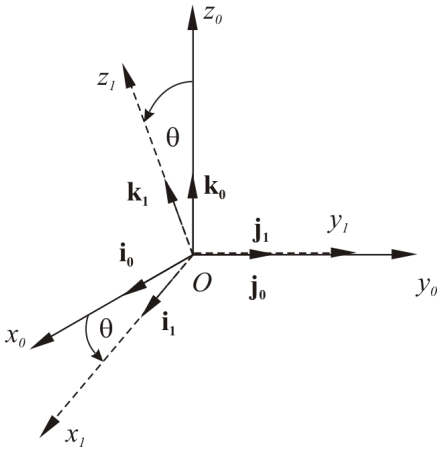
Имајући у виду да важе следеће релације $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_0 = \cos\theta$, $\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_0 = -\sin\theta$, $\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_0 = \cos\theta$, $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_0 = \sin\theta$ и $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_0 = 1$ матрица (3.7) у овом случају добија облик

$$\mathbf{R}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

где $\mathbf{R}_{\mathbf{z},\theta}$ означава матрицу ротације око z осе за угао θ. Због поједностављеног записивања надаље ћемо, када год је погодно, користити скраћени запис $\sin\theta = S\theta$ и $\cos\theta = C\theta$. Тако, (3.11) постаје

$$\mathbf{R}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

На сличан начин се могу одредити матрице ротација око осталих координатних оса. Најпре ћемо одредити матрицу ротације око y осе. На сл. 3.3 је схематски приказана ротација координатног система око y осе.



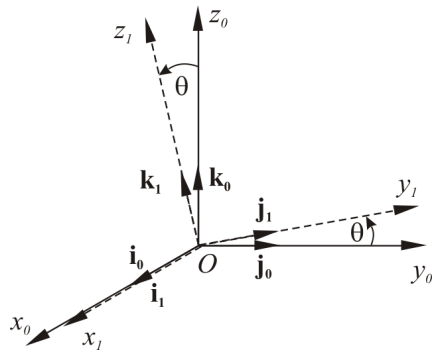
Слика 3.3: Ротација координатног система око y осе

На исти начин као раније следи:

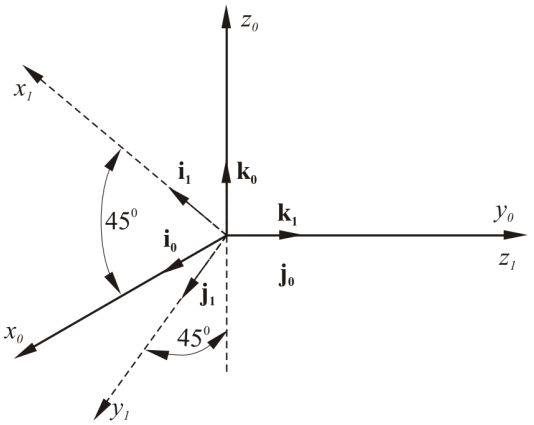
$$\mathbf{R}_{y,\theta} = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

За ротацију координатног система око x осе (сл. 3.4) следи:

$$\mathbf{R}_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$



Слика 3.4: Ротација координатног система око x осе



Слика 3.5: Релативни положај координатних система из Примера 3.1

Матрице ротација (3.12), (3.13) и (3.14) које представљају ротације координатних система око сопствених координатних оса x, y и z за одређени угао θ се називају елементарним матрицама ротације.

Пример 3.1.

За случај релативног положаја координатних система $O_0 - x_0y_0z_0$ и $O_1 - x_1y_1z_1$ као што је приказано на сл. 3.5 одредити матрицу ротације и пројекције вектора $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ на осе координатног система $O_0 - x_0y_0z_0$.

Већ је раније речено да колоне матрице ротације (3.7)) представљају пројекције ортова координатног система $O_1 - x_1y_1z_1$ на систем $O_0 - x_0y_0z_0$. Према томе

$$\mathbf{i}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{j}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

па следи

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos 45^0 & \cos 45^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos 45^0 & -\cos 45^0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix},$$

где је са $\mathbf{R_0^1}$ означена матрица ротације између координатних система $O_0 - x_0y_0z_0$ и $O_1 - x_1y_1z_1$.

3.1.2 Слагање ротација

Посматрајмо три координатна система ($O_0 - x_0y_0z_0$, $O_1 - x_1y_1z_1$ и $O_2 - x_2y_2z_2$) чији су координатни почеци у истој тачки, а осе им се не поклапају. То значи да су системи међусобно закренути. Претпоставимо, затим, да $\mathbf{R_0^1}$ представља матрицу ротације између координатних система $O_0 - x_0y_0z_0$, и $O_1 - x_1y_1z_1$, матрица $\mathbf{R_1^2}$ матрицу ротације између $O_1 - x_1y_1z_1$, и $O_2 - x_2y_2z_2$ а матрица

$\mathbf{R_0^2}$ представља матрицу ротације између координатних система $O_0 - x_0y_0z_0$, и $O_2 - x_2y_2z_2$. Уочимо ли поново тачку П (као на сл. 3.1), њене координате можемо изразити у односу на различите координатне системе па $\mathbf{p_0}$, $\mathbf{p_1}$ и $\mathbf{p_2}$ представљају пројекције исте тачке на координатне системе $O_0 - x_0y_0z_0$, $O_1 - x_1y_1z_1$, и $O_2 - x_2y_2z_2$, респективно. Стога можемо писати

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{p}_1, \tag{3.15}$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^2 \cdot \mathbf{p}_2, \tag{3.16}$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_1^2 \cdot \mathbf{p}_2. \tag{3.17}$$

Уколико (3.17) сменимо у (3.15) следи:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{R}_1^2 \cdot \mathbf{p}_2, \tag{3.18}$$

одакле упоређивањем израза сл. 3.16 и сл. 3.18 следи:

$$\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{R}_1^2. \tag{3.19}$$

Израз (3.19) описује трансформацију координата вектора при више сукцесивних ротација што се назива *слагањем ротација*. Ако су нам познате координате вектора $\mathbf{p}$ у односу на координатни систем $O_2 - x_2y_2z_2$ (вектор $\mathbf{p_2}$), из израза (3.18) се јасно види следеће: да би добили координате истог вектора у односу на координатни систем $O_0 - x_0y_0z_0$ вектор $\mathbf{p_2}$ треба прво помножити матрицом ротације да би добили његове координате у односу на координатни систем $O_1 - x_1y_1z_1$, а затим, новодобијени вектор помножити матрицом ротације . Резултат је вектор $\mathbf{p}$ изражен у односу на координатни систем $O_0 - x_0y_0z_0$ тј. $\mathbf{p_0}$.

Израз (3.18) се може интерпретирати и на други начин. Претпоставимо сада да се у почетном тренутку сва три координатна система поклапају. Заротирајмо најпре заједно координатне системе $O_1 - x_1y_1z_1$, и $O_2 - x_2y_2z_2$ у односу на систем $O_0 - x_0y_0z_0$ (матрица ротације $\mathbf{R_0^1}$), а затим само координатни систем $O_2 - x_2y_2z_2$ у односу на $O_1 - x_1y_1z_1$ ($\mathbf{R_1^2}$). При више узастопних ротација координатни систем у односу на који се у датом тренутку реализује ротација дефинисана матрицом $\mathbf{R_i^{i+1}}$ називамо ***текућим координатним системом***. Посебно је важно истаћи да захтевани ***редослед ротација*** мора бити поштован. Да би то илустровали, размотримо две узастопне ротације: прво из почетног положаја координатни систем заротирамо за угао φ око y осе, а затим за угао θ око z осе која се налази у новом положају (текући положај координатног система). У складу са предходним разматрањем следи:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{y,\varphi} \cdot \mathbf{R}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} C\varphi & 0 & S\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\varphi & 0 & C\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\theta & -C\varphi \cdot S\theta & S\varphi \\ S\theta & C\theta & 0 \\ -S\varphi \cdot C\theta & S\varphi \cdot S\theta & C\varphi \end{bmatrix}$$

Ако се редослед ротација измени и прво реализујемо ротацију за угао θ око z осе, а затим за угао φ око текуће y осе, следи:

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R}_{z,\theta} \cdot \mathbf{R}_{y,\varphi} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\varphi & 0 & S\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\varphi & 0 & C\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\theta & -S\theta & C\theta \cdot S\varphi \\ S\theta \cdot C\varphi & C\theta & S\theta \cdot S\varphi \\ -S\varphi & 0 & C\varphi \end{bmatrix}$$

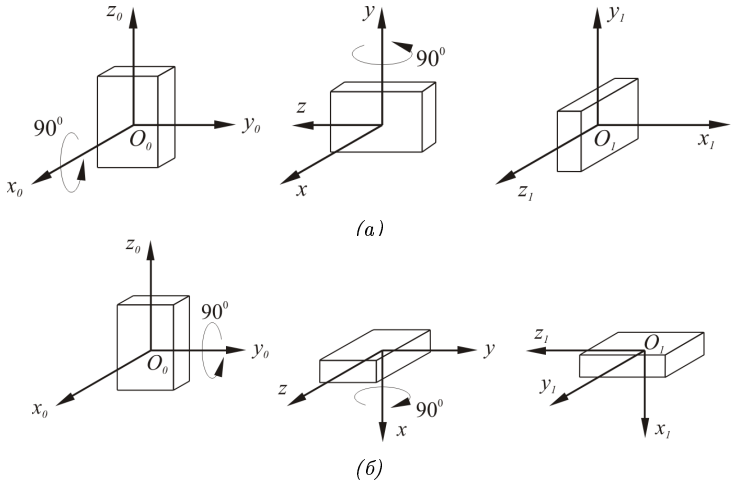
Дакле,

$$\mathbf{R} \neq \mathbf{R}^*$$

С обзиром да резултат није исти, можемо закључити да коначне ротације нису комутативне и да се при срачунавању резултујуће матрице ротације мора водити рачуна о редоследу множења.

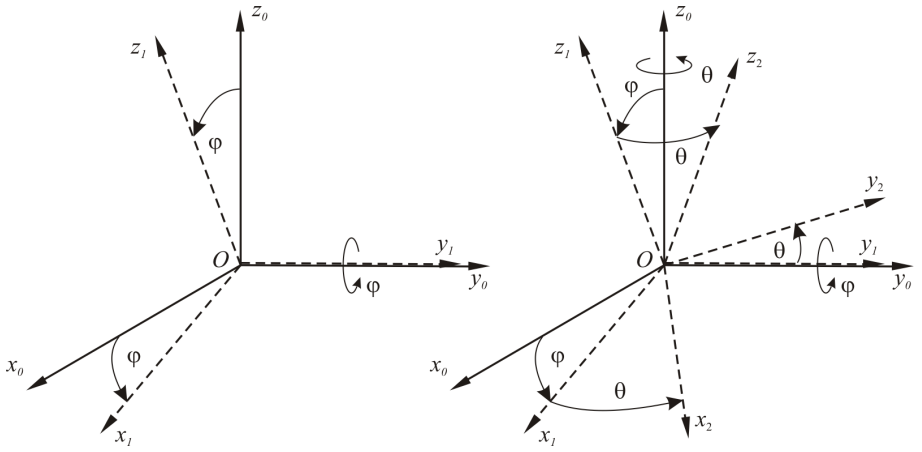
Илустроваћемо ово још очигледније следећим примером. Заротирајмо паралелепипед око x_0 осе за $+\pi/2$, а затим око новог положаја у осе поново за $+\pi/2$. Положај паралелепипеда после сваке ротације је приказан на сл. 3.6а.

Међутим, када променимо редослед ротација, и паралелепипед заротирајмо прво око y_0 осе за $\pi/2$, а затим око новог положаја x осе за $\pi/2$, (сл. 3.6б). Очигледно је да је крајњи положај паралелепипеда другачији него у претходном случају.



Слика 3.6: Примери узастопних и истих ротација тела око координатних оса али различитим редоследом

У свим наведеним примерима ротације су реализоване око оса претходно ротираног координатног система, тј. ротације су реализоване око оса текућег координатног система. Размотримо сада слагање ротација које се реализују око оса непокретног координатног система. На сл. 3.7 су приказане две узастопне ротације координатног система $O_0 - x_0y_0z_0$, прво око осе y_0 за угао φ (нови положај координатног система је приказан са $O_1 - x_1y_1z_1$), а затим за угао θ око осе z_0 (нови положај координатног система је приказан са $O_2 - x_2y_2z_2$). Пошто је прва ротација око осе y_0 која истовремено представља



Слика 3.7: Узастопне ротације координатног система око оса непокретног координатног система

и тренутну осу ротације важи:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_{y,\varphi} \cdot \mathbf{p}_1$$

Затим треба ротирати координатни систем око осе z_0 непокретног координатног система. Да бисмо применили закон о слагању ротација (3.19) треба најпре вратити координатни систем у првобитно стање (применити ротацију око осе y_0 за угао $-\varphi$), затим реализовати ротацију око осе z_0 за угао θ, а затим поново извршити ротацију око осе y_0, овај пут за угао φ. Према томе, следи

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_{y,-\varphi} \cdot \mathbf{R}_{z,\theta} \cdot \mathbf{R}_{y,\varphi} \cdot \mathbf{p}_2 \,. \tag{3.20}$$

Коначно, укупна трансформација се добија у следећој форми:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \mathbf{R}_{\mathbf{y},\varphi} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{y},-\varphi} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{z},\theta} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{y},\varphi} \cdot \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_0 &= \mathbf{R}_{\mathbf{z},\theta} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{y},\varphi} \cdot \mathbf{p}_2 \,. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Према томе, можемо да закључимо да за ротације око непокретног координатног система можемо да применимо закон о слагању ротација (3.19) око оса текућих координатних система али ***обрнутим редом*** у односу на редослед ротација око оса текућег координатног система. Ако ово применимо на претходни пример ротације паралелепипеда, и ако желимо да постигнемо исту крајњу оријентацију предмета као при ротацији око y_0 за $\pi/2$, а затим око x за $\pi/2$, прво морамо да извршимо ротацију око x_0 за $\pi/2$, а затим око y_0 исто за $\pi/2$, што је приказано на сл. 3.8.

Према томе, можемо да закључимо да за слагање ротација важи следеће правило:

- $\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{R}_1^2$ ако се ротација обавља око оса текућег координатног система.

- $\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{R}_1^2 \cdot \mathbf{R}_0^1$ ако се ротација обавља око оса непокретног координатног система.

Напоменимо да је при решавању задатака на ову чињеницу потребно посебно обратити пажњу.

3.1.3 Ротирање у односу на произвољни координатни систем

Претпоставимо да имамо вектор који је изражен у односу на нулти координатни систем у почетној позицији $\mathbf{p}_0^p$ и да желимо да га заротирамо за матрицу ротације ${}^0\mathbf{R}$ која је изражена у односу на први координатни систем и његове осе. Тај исти вектор изражен у односу на први координатни систем ће бити:

$$\mathbf{p}_1^p = \left(\mathbf{R}_0^1\right)^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{p}_0^p \tag{3.22}$$

Када на тај вектор применимо матрицу ротације $\mathbf{R_A}$ добијамо његову коначну позицију у односу на први координатни систем:

$$\mathbf{p}_1^k = {}^0\mathbf{R} \cdot \mathbf{p}_1^p = {}^1\mathbf{R} \cdot \left(\mathbf{R}_0^1\right)^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{p}_0^p \tag{3.23}$$

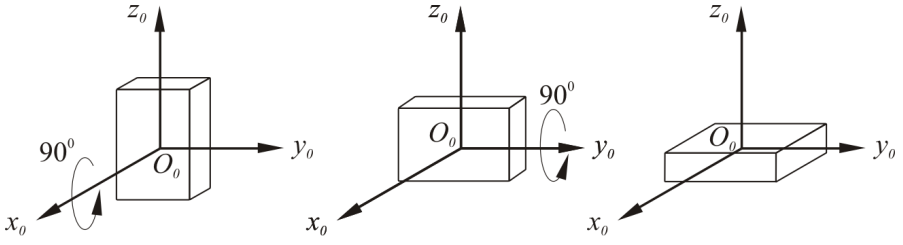
На крају треба вратити вектор у почетни координатни систем:

$$\mathbf{p}_0^k = \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{p}_1^p = \mathbf{R}_0^1 \cdot {}^1\mathbf{R} \cdot \left(\mathbf{R}_0^1\right)^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{p}_0^p \tag{3.24}$$

Чиме добијамо да је матрица ротације $\mathbf{R_A}$ изражена у односу на нулти координатни систем једнака:

$${}^0\mathbf{R} = \mathbf{R}_0^1 \cdot {}^1\mathbf{R} \cdot \left(\mathbf{R}_0^1\right)^{\mathbf{T}} \tag{3.25}$$

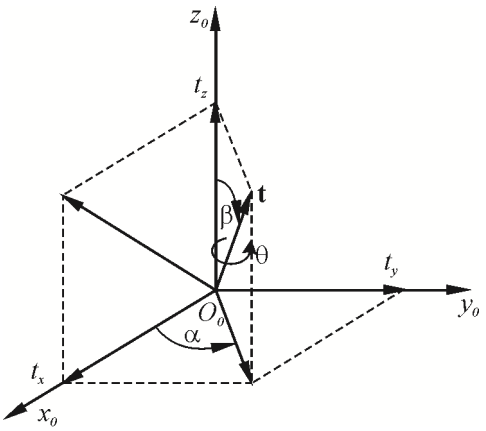
Оно што је овде битно напоменути јесте суптилна разлика између ротације у односу на произвољни координатни систем и слагања ротација иако делују врло слично. Приликом слагања ротација врши се транформација вектора из последњег координатног система у низу у почетни координатни систем. Нпр на основу израза (3.19) добијамо трансформацију вектора из другог координатнг ситема у почетни (нулти). Уколико имамо ротацију у односу на произвољни координатни систем, трансформише се вектор изражен у односу на почетни коодинатни систем ротирањем у односу на произвољни кординатни систем али је резултат такође изражен у почетном координатом систему.



Слика 3.8: Ротације око оса непокретног координатног система

3.1.4 Ротација око произвољне осе

У досадашњим примерима смо разматрали ротације координатних система око њихових оса. Међутим, поставља се питање како пронаћи матрицу ротације уколико је ротација извршена за одређени угао θ око произвољне осе која се не поклапа ни са једном од координатних оса и која је дефинисана ортом $\mathbf{t}$ чије су пројекције на непокретни координатни систем дате са $\mathbf{t} = \left[t_x, t_y, t_z\right]^T$ (сл. 3.9). Како је $\mathbf{t}$ јединични орт вектор важи да је $t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 = 1$.



Слика 3.9: Ротација око произвољне осе

Овај задатак је специјалан случај претодног задатка када је ротација изражена у односу на произвољни координатни систем. Самим тиме он се може решити на следећи начин: заротирамо почетни координатни систем тако да поклопимо неку од координатних оса, нпр. z са осом дефинисаном ортом $\mathbf{t}$. Затим треба извршити ротацију за посматрани угао θ и на крају вратити осу у њен првобитни положај. Да би реализовали предложени начин и вектор $\mathbf{t}$ поклопили са z осом треба га најпре ротирати за угао α око z_0 осе, а затим за угао β око осе y. Затим треба извршити тражену ротацију за угао θ, и на крају вратити координатне системе у првобитни положај. Према томе, следи

$$\mathbf{R}_{t,\theta} = \mathbf{R}_{z,\alpha} \cdot \mathbf{R}_{y,\beta} \cdot \mathbf{R}_{z,\theta} \cdot \mathbf{R}_{y,-\beta} \cdot \mathbf{R}_{z,-\alpha} \,. \tag{3.26}$$

Лако се да запажа веза са изразом (3.25) када је ротација изражена у односу на произвољни координатни систем, где је ${}^0\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\mathbf{t},\theta}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} = \mathbf{R}_{\mathbf{z},\alpha} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{y},\beta}$ и ${}^1\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\mathbf{z},\theta}$.

Са сл. 3.9 је очигледно

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{t_y}{\sqrt{t_x^2 + t_y^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{t_x}{\sqrt{t_x^2 + t_y^2}} \\ \sin\beta &= \sqrt{t_x^2 + t_y^2}, \qquad \cos\beta = t_z \end{aligned} \tag{3.27}$$

па се множењем матрица из (3.26) добија тражена матрица ротације у облику:

$$\mathbf{R}_{t,\theta} = \begin{bmatrix} t_x^2(1-C\theta)+C\theta & t_x t_y(1-C\theta)-t_z S\theta & t_x t_z(1-C\theta)+t_y S\theta \\ t_x t_y(1-C\theta)+t_z S\theta & t_y^2(1-C\theta)+C\theta & t_y t_z(1-C\theta)-t_x S\theta \\ t_x t_z(1-C\theta)-t_y S\theta & t_y t_z(1-C\theta)+t_x S\theta & t_z^2(1-C\theta)+C\theta \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

Овде треба скренути пажњу на особину $\mathbf{R}_{t,\theta} = \mathbf{R}_{-t,-\theta}$. Практично значи да је ротација око осе $\mathbf{t}$ за угао θ иста као и ротација око осе $-\mathbf{t}$ (исти правац супротини смер) за угао $-\theta$.

Родригезова формула

Уколико имамо задату осу и угао ротације, поред матрице ротације добијене на основу (3.28) и израза (3.6) за трансформацију вектора $\mathbf{p}$ Родригезову формулу која гласи:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}\cos\theta + (\mathbf{t}\times\mathbf{p})\sin\theta + \mathbf{t}\,(\mathbf{t}\cdot\mathbf{p})\,(1-\cos\theta) \tag{3.29}$$

У претходном изразу $\times$ означава векторски док $\cdot$ означава скаларни производ два вектора. Добијени вектор $\mathbf{p}'$ је резултат ротације вектора $\mathbf{p}$ око осе $\mathbf{t}$ за угао θ. Ова трансформација је потпуно еквивалентна комбинацији израза (3.6) и (3.28), уз нешто компактнији запис и једноставније рачунање. Уз то, из ове једначине се може извести алтернативан запис за једначину (3.28) у облику:

$$\mathbf{R}_{t,\theta} = \cos\theta\mathbf{I} + \sin\theta\mathbf{S}(\mathbf{t}) + (1-\cos\theta)\,\mathbf{t}\otimes\mathbf{t} \tag{3.30}$$

, где је $\mathbf{I}$ јединична матрица, $\mathbf{S}(\mathbf{t})$ је кососиметрична матрица која одговара векторском производу са $\mathbf{t}$ (погледај 4.1.2), а $\otimes$ представља спољашњи производ вектора.

3.1.5 Ојлерови углови

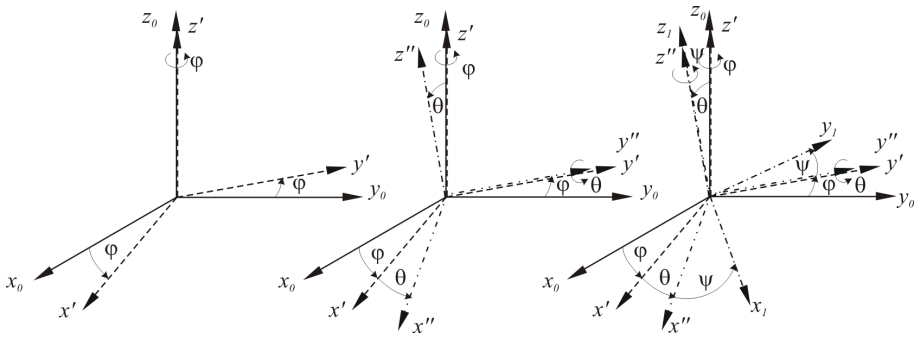
Релативну оријентацију једног координатног система у односу на други је могуће задавати са три узастопне ротације које су изведене на тачно одређени начин. За то се веома често користе Ојлерови углови θ, φ и ψ. Треба напоменути да постоји више начина дефинисања Ојлерових углова, али ћемо поменути само два која се најчешће срећу: ZYZ и ZYX.

Први начин: ZYZ Ојлерови углови

Према овом начину дефинисања Ојлерових углова, треба координатни систем из почетног положаја заротирати око z_0 осе за угао φ, затим око новог положаја осе y (оса y' на сл. 3.10) за угао θ, и на крају, око новог положаја осе z (оса z'') за угао ψ.

Применом правила о слагању ротација добијамо:

$$\mathbf{R}_0^1 = \mathbf{R}_{z,\varphi}\cdot\mathbf{R}_{y,\theta}\cdot\mathbf{R}_{z,\psi} \tag{3.31}$$



Слика 3.10: Ротације координатног система коришћењем ZYZ Ојлерових углова

па следи

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\theta \cdot C\psi - S\varphi \cdot S\psi & -C\varphi \cdot C\theta \cdot S\psi - S\varphi \cdot C\psi & C\varphi \cdot S\theta \\ S\varphi \cdot C\theta \cdot C\psi + C\varphi \cdot S\psi & -S\varphi \cdot C\theta \cdot S\psi + C\varphi \cdot C\psi & S\varphi \cdot S\theta \\ -S\theta \cdot C\psi & S\theta \cdot S\psi & C\theta \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

чиме је матрица ротације одређена.

Други начин: ZYX Ојлерови углови

У овом случају, крајњу оријентацију координатног система добијамо када координатни систем из почетног положаја заротирамо око осе z_0 за угао φ, затим око новог положаја осе y га ротирамо за угао θ и на крају, око новог положаја осе x за угао ψ.

На исти начин као раније можемо добити коначну матрицу ротације у облику:

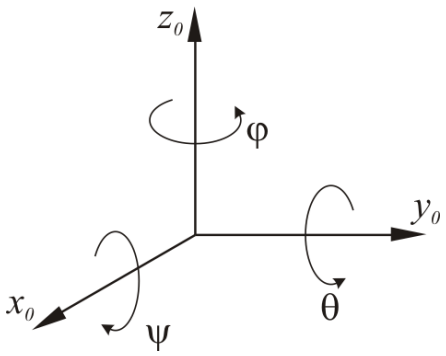
$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\theta & C\varphi \cdot S\theta \cdot S\psi - S\varphi \cdot C\psi & C\varphi \cdot S\theta \cdot C\psi + S\varphi \cdot S\psi \\ S\varphi \cdot C\theta & S\varphi \cdot S\theta \cdot S\psi + C\varphi \cdot C\psi & S\varphi \cdot S\theta \cdot C\psi - C\varphi \cdot S\psi \\ -S\theta & C\theta \cdot S\psi & C\theta \cdot C\psi \end{bmatrix}; \tag{3.33}$$

чиме је и за овај случај дефинисана одговарајућа матрица ротације.

3.1.6 Ротација дефинисана угловима скретања, ваљања и пропињања

Матрицу ротације можемо дефинисати низом узастопних ротација око оса непокретног координатног система по одређеном редоследу (сл. 3.11): ротација око x_0 осе за угао ψ, ротација око y_0 осе за угао θ и ротација око z_0 осе за угао φ.

По аналогији са кретањем возила (брода, авиона...) угао φ називамо углом скретања (дефинише скретање са курса), угао ψ називамо углом ваљања (одговара бочном ваљању брода) а угао θ називамо углом пропињања. Због већ стечене навике коришћења, наводимо термине за ове углове на енглеском



Слика 3.11: Углови скретања (φ), ваљања (ψ) и пропињања (θ)

језику: угао скретања се назива јо (*енгл.* yaw), угао ваљања рол (*енгл.* ролл), а угао пропињања пич (*енгл.* питцх). Матрица ротације има следећи облик

$$\mathbf{R}_0^1 = \mathbf{R}_{z,\varphi} \cdot \mathbf{R}_{y,\theta} \cdot \mathbf{R}_{x,\psi}$$

или у коначној форми

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\theta & -S\varphi \cdot C\psi + C\varphi \cdot S\theta \cdot S\psi & S\varphi \cdot S\psi + C\varphi \cdot S\theta \cdot C\psi \\ S\varphi \cdot C\theta & C\varphi \cdot C\psi + S\varphi \cdot S\theta \cdot S\psi & -C\varphi \cdot S\psi + S\varphi \cdot S\theta \cdot C\psi \\ -S\theta & C\theta \cdot S\psi & C\theta \cdot C\psi \end{bmatrix}. \tag{3.34}$$

Приметимо овде да је ротација дефинисана угловима скретања, ваљања и порпињања потпуно еквивалентна ZYX Ојлеровим угловима.

3.1.7 Одређивање осе и угла ротације на основу познате матрице ротације

Сама матрица ротације нам не даје представу о каквој ротацији се ради. Стога је погодно, уколико је позната матрица ротације између два координатна система, да се одреде еквивалентна оса и угао ротације који одговарају датој матрици. Ако је, у општем облику, матрица ротације дата са

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

онда је еквивалентни угао, обележимо га са θ дат са

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \tag{3.36}$$

а пројекције орта осе $\mathbf{t}$ су дате са

$$\mathbf{t} = \frac{1}{2 \cdot \sin\theta} \cdot \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}. \tag{3.37}$$

Треба напоменути да уколико је угао ротације θ једнак 0 или 180 степени, у претходној једначини имамо дељење нулом. У случају да је угао 0 оса ротације може бити произвољна, док уколико је угао 180 степени, осу ротације морамо одредити на основу елемената који нису на дијагонали. Ове конфигурације представља сингуларитете репрезентације ротације помоћу угла и осе ротације.

3.1.8 Одређивање Ојлерових углова на основу познате матрице ротације

Као што смо одредили осу и угао ротације на основу познате матрице ротације, такође од великог интереса је одредити Ојлерове углове за задату матрицу ротације.

Први начин: ZYZ Ојлерови углови

Посматрајући општи облик матрице ротације задату једначином (3.35) и матрицу ротације за ZYZ Ојлерове углове (3.32), можемо одредити Ојлерове углове који резултују задатом матрицом ротације:

$$\theta = \pm \arccos r_{33} \tag{3.38}$$

$$\varphi = \arctan2(\frac{r_{23}}{S\theta}, \frac{r_{13}}{S\theta}) \tag{3.39}$$

$$\psi = \arctan2(\frac{r_{32}}{S\theta}, -\frac{r_{31}}{S\theta}). \tag{3.40}$$

У овим изразима arctan2 представља аркус тангенс са два параметра. Разлика између њега и класичног аркус тангенса је у томе што он узима у обзир предзнаке операнада, нпр $\arctan2(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = -3\pi/4$ док је $\arctan \frac{-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = \arctan 1 = \pi/4$ јер се предзнак скрати приликом дељења. Битно је овде уочити да постоје два решења. Од избора угла θ зависе вредности друга два φ и ψ. У случају да је $\sin\theta = 0$ односно $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, овај систем једначина је неодређен. Прва и последња оса ротације су колинеарне и немогуће је једнозначно одредит сва три Ојлерова угла, већ ће постојати бесконачно много решења.

Други начин: ZYX Ојлерови углови

Слично првом случају, на основу општог облика матрице ротације (3.35) и матрице ротације за ZYX Ојлерове углове (3.33) можемо одредити одговарајуће ојлерове углове:

$$\theta_1 = -\arcsin r_{31},\ \theta_2 = -\pi + \arcsin r_{31} \tag{3.41}$$

$$\varphi = \arctan2(\frac{r_{21}}{C\theta}, \frac{r_{11}}{C\theta}) \tag{3.42}$$

$$\psi = \arctan2(\frac{r_{32}}{C\theta}, \frac{r_{33}}{C\theta}). \tag{3.43}$$

Као и у претходном случају, и овом приликом постоје два решења. Због тога ће се приликом коришћења Ојлерових углова јављати дилема избора једног од два решења. То ће касније представљати проблем приликом када будемо желели да синтетишемо континуали прелазак између две оријентације. Ова тема ће бити детаљније обрађено у поглављу 5.2.2. Слично претходном случају, види се да је систем неодређен уколико је $C\theta = 0$ односно $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$

3.1.9 Јединични кватерниони

У претходних пар одељака описано је неколицина начика за репрезентацију релативне ротације између два координатна система. Матрица ротације, иако врло интуитивна, са добро дефинисаним операторима слагања ротација и ротације вектора, је врло редундантна. Матрица ротације садржи чак 9 параметара који нису међусобно независни. Осим тога, приликом нумеричког рачунања потребно је водити рачуна о очувању ортогоналности матрице, што не представља тривијалан задатак.

Са друге стране Ојлерови углови представљају минималну репрезентацију ротације између два координатна систем, описујући исту са само три параметра. Међутим, операције слагање ротација као и трансформација вектора из једног у други координатни систем јасно дефинисане. Наведене операције се врше посредством матрица ротације, тако што прво израчунамо матрице ротације за дате Ојлерове углове.

Репрезентација ротације помоћу угла и осе ротације има проблем, што у случају да се координатни системи поклапају, репрезентација није једнозначна.

Управо као последица наведеног, на већини модерних индустријских робота, за репрезентацију ротације између координатних система користе се јединични кватерниони.

3.1.9.1 Дефиниција јединичних кватерниона

Кватерниони представљају проширење комплексних бројева који се записују у облику:

$$\mathbf{q} = w + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{3.44}$$

где су w, x, y и z реални бројеви, док се $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ називају јединицама кватерниона за које важи:

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1 \tag{3.45}$$

Битно је напоменути да множење јединица кватерниона није комунитативно, већ важи $\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}$

За репрезентацију ротације, користе се искључиво јединични кватерниони, за које важи $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$. У том случају, постоји врло једноставна веза

између репрезентације помоћу осе и угла ротације и кватерниона:

$$w = \cos\frac{\theta}{2} \tag{3.46}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{t}\sin\frac{\theta}{2} \tag{3.47}$$

Како су углови θ и $\theta + 2\pi$ практично исти, на основу једначина (3.46) и (3.47) можемо добити особину да кватерниони $\mathbf{q_1} = (w, x, y, z)$ и $\mathbf{q_2} = (-w, -x, -y, -z)$ представљају исту трансформацију. Уз то, уколико нема ротације између координатних система, односно $\theta = 0$, кватернион који такву ротацију је $\mathbf{0}_q = (1, 0, 0, 0)$.

3.1.9.2 Слагање кватерниона

Као и у одељку 3.1.2, треба размотрити како се слажу ротације које су представљене као кватерниони. Слично као и тамо, претпоставимо да имамо три координатна система ($O_0 - x_0y_0z_0$, $O_1 - x_1y_1z_1$ и $O_2 - x_2y_2z_2$), и да кватернион $\mathbf{q}_0^1 = (w_0^1, x_0^1, y_0^1, z_0^1)$ репрезентује ротацију од нултог до првог координатног система, док $\mathbf{q}_1^2 = (w_1^2, x_1^2, y_1^2, z_1^2)$ репрезентује ротацију од првог до другог координатног система. Поставља се питање, како одредити кватернион који репрезентује ротацију од нултог до другог координатног система $\mathbf{q}_0^2 = (w_0^2, x_0^2, y_0^2, z_0^2)$.

Испоставља се да се укупни кватернион добија множењем кватерниона за сваку ротацију редоследом којим су се оне дешавале, исто као и матрице ротације. То значи:

$$\mathbf{q}_0^2 = \mathbf{q}_0^1\mathbf{q}_1^2, \tag{3.48}$$

где је множење кватерниона врло слично множењу комплексних бројева. Развијањем овог израза уз коришћење особина (3.45) се добија:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0^2 &= (w_0^1 + x_0^1\boldsymbol{i} + y_0^1\boldsymbol{j} + z_0^1\boldsymbol{k})(w_1^2 + x_1^2\boldsymbol{i} + y_1^2\boldsymbol{j} + z_1^2\boldsymbol{k}) = \\ &= w_0^1w_1^2 - x_0^1x_1^2 - y_0^1y_1^2 - z_0^1z_1^2 + (w_0^1x_1^2 + x_0^1w_1^2 + y_0^1z_1^2 - z_0^1y_1^2)\boldsymbol{i} + \\ &+ (w_0^1y_1^2 - x_0^1z_1^2 + y_0^1w_1^2 + z_0^1x_1^2)\boldsymbol{j} + (w_0^1z_1^2 + x_0^1y_1^2 + y_0^1x_1^2 - z_0^1w_1^2)\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{3.49}$$

Односно:

$$\mathbf{q}_0^2 = \begin{pmatrix} w_0^2 \\ x_0^2 \\ y_0^2 \\ z_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0^1w_1^2 - x_0^1x_1^2 - y_0^1y_1^2 - z_0^1z_1^2 \\ w_0^1x_1^2 + x_0^1w_1^2 + y_0^1z_1^2 - z_0^1y_1^2 \\ w_0^1y_1^2 - x_0^1z_1^2 + y_0^1w_1^2 + z_0^1x_1^2 \\ w_0^1z_1^2 + x_0^1y_1^2 - y_0^1x_1^2 + z_0^1w_1^2 \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

Као што је већ можда интуитивно јасно, неутрални елемент за множење кватерниона управо $\mathbf{0}_q = (1, 0, 0, 0)$ који одговара трансформацији између два координатна система који се поклапају. То значи да за сваки кватернион $\mathbf{q}$ важи следеће:

$$\mathbf{q}\mathbf{0}_q = \mathbf{0}_q\mathbf{q} = \mathbf{q} \tag{3.51}$$

3.1.9.3 Коњуговани кватернион

Коњуговање кватерниона је аналогно коњугвању комплексних бројева односно за кватернион $\mathbf{q} = w + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ коњуговани кватернион се дефинише као:

$$\bar{\mathbf{q}} = w - x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k} \tag{3.52}$$

Уколико пробамо да помножимо *јединични* кватернион са његовим коњугованим кватернионом, (који је по природи ствари такође јединични) добијамо:

$$\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} = \mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = (w^2 + x^2 + y^2 + z^2, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0) = \mathbf{0}_q \tag{3.53}$$

Тиме добијамо да је инверзни кватернион јединичног кватерниона управо његов коњуговани кватернион. То у контексту ротација има за последицу чињеницу да уколико је ротација од нултог до првог представљена кватернионом $\mathbf{q}_0^1$, онда је ротација од првог до нултог координатног система дата са:

$$\mathbf{q}_1^0 = \bar{\mathbf{q}}_0^1. \tag{3.54}$$

3.1.9.4 Трансформација веткора када је ротација представљена кватернионом

Вектор у тродимензионалном простору се лако може записату у облику кватерниона, тако што додамо 0 на прво место. Односно, вектору $v = (x, y, z)$ одговара кватернион ${}^v\mathbf{q} = (0, x, y, z)$. Сходно томе, уколико познајемо вектор $\mathbf{p}_1$ који је изражен у првом координатом систему и кватернион који одтовара ротацији од нултог до првог координатног система $\mathbf{q}_0^1$ можемо израчунати координате истог вектора изражене у односу на нулти координатни систем $\mathbf{p}_0$на основу следећег израза:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{p}_0 \end{pmatrix} = \mathbf{q}_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{p}_1 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}_0^1. \tag{3.55}$$

Овиме смо завршили дефиниције свих основних операција са кватернионима, које смо, такође, већ дефинисал у претходним одељцима. Како би начинили ствари јаснијим, начин коришћења матрица ротације и кватерниона ћемо илустровати на следећем примеру.

3.1.9.5 Одређивање осе и угла ротације на основу кватерниона

Веза између кватерниона и еквивалентне осе и угла ортације је дата једначинама (3.46) и (3.47), и на основу њих је за задат кватернион $\mathbf{q} = (w, x, y, z)$ можемо релативно лако еквивалентну осу и угао ротације:

$$\theta = \pm 2 \arccos w \tag{3.56}$$

$$\mathbf{t} = \frac{\operatorname{sign}(\sin \frac{\theta}{2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{3.57}$$

Такође овде имамо два решења за задати кватернион. То је у складу са закључцима наведеним у 3.1.7, где је наведено да θ и $\mathbf{t}$ представљају исту ротацију као и $-\theta$ и $-\mathbf{t}$.

3.1.9.6 Одређивање матрице ротације на основу кватерниона

Када је еквивалента оса и угао одређени, можемо те вредности уврстити у израз (3.28) како би одредили матрицу ротације која одговара јединичном кватерниону $\mathbf{q} = (w, x, y, z)$:

$$\mathbf{R}_\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2(xy-wz) & 2(xz+wy) \\ 2(xy+wz) & 1-2(x^2+z^2) & 2(yz-wx) \\ 2(xz-wy) & 2(yz+wx) & 1-2(x^2+y^2) \end{bmatrix}. \tag{3.58}$$

3.1.9.7 Одређивање кватерниона на основу матрице ротације

Наравно, кватернион на основу матрице ротације се може одредити како што на основу матрице ротације одредимо еквивалентан угао и осу ротације на основу једачина (3.36) и (3.37). Затим се може одредити кватернион на основу осе и угла ротације помоћу једнакости (3.46) и (3.47).

Међутим, како је у претходној једначини одређена матрица ротације која одговара јединичном кватерниону, лако се могу добити једнакости за кватернион који одговара матрици задатаој матрици ротације:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1}}{2} \\ \frac{\mathrm{sign}(r_{32}-r_{23})\sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1}}{2} \\ \frac{\mathrm{sign}(r_{13}-r_{31})\sqrt{-r_{11}+r_{22}-r_{33}+1}}{2} \\ \frac{\mathrm{sign}(r_{21}-r_{12})\sqrt{-r_{11}-r_{22}+r_{33}+1}}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.59}$$

На овај начин је могуће директно одредити кватернион на основу матрице ротације. Још једна корист од овог начина јесте што нема сингуларитета, за разлику од једнакости за одређивање осе и угла ротације на основу матрице ротације која се користи у међукоратку. Сингуларитет је описан у одељку 3.1.7.

Пример 3.2.

Како би приказали слагање ротација посматраћемо конфигурацију са слике сл. 3.5, и приказати поступак рачунања прво матрице $\mathbf{R}_0^1$, па затим кватерниона $\mathbf{q}_0^1$. Овога пута ћемо их рачунати као секвенцу прво ротације око осе x за угао $-90°$ и затим ротације око новонастале осе z за угао $-45°$. Затим ћемо трансформисати вектор $\mathbf{p}_1 = [\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2,\ 0]^T$ из првог у нулти координатни систем, да би напослетку трансформисали вектор $\mathbf{v}_0 = [\sqrt{2}/2,\ 0,\ -\sqrt{2}/2]^T$ из нултог у први координатни систем.

Почнимо од матрица ротација. Као што је већ речено, ротације се слажу тако што множимо матрице ротације у редоследу у коме су се ротације

дешавале па добијамо:

$$\mathbf{R}_0^1 = \mathbf{R}_{x,-90} \cdot \mathbf{R}_{z,-45} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Што је, наравно, потпуно исти резултат који је добијен и у примеру 3.1. Сада ћемо извршити трансформације вектора из једног координатног система у други:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{R}_1^0 \cdot \mathbf{v}_0 = (\mathbf{R}_0^1)^T \cdot \mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Тиме смо добили да се вектор $\mathbf{p}$ у ствари поклапа са ортом осе x_0, вектором $\mathbf{i}_0$, док се вектор $\mathbf{v}$ поклапа са ортом осе y_1, вектором $\mathbf{j}_1$. До истог резултата се може доћи Уколико се пажљиво погледа сл. 3.5.

Сада ћемо решити исти проглем коришћењем кватерниона. Имајући на уму да је $C(-\frac{90}{2}) = C(-45) = \sqrt{2}/2$, $S(-45) = -\sqrt{2}/2$, $C(-22.5) = \sqrt{2+\sqrt{2}}/2$ и $S(-22.5) = -\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$ уз изразе (3.46), (3.47) и (3.50) можемо одредити кватернион који представља ротацију од нултог до првог координатног система:

$$\mathbf{q}_0^1 = \mathbf{q}_{x,-90}\mathbf{q}_{z,-45} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4} \\ -\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4} \\ -\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{4} \\ -\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{4} \end{pmatrix}$$

Када смо одредили кватернион, коришћењем израза (3.52), (3.54) и (3.55), можемо извршити тражене трансформације координата:

$$\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{p}_0\end{pmatrix} = \mathbf{q}_0^1 \begin{pmatrix}0\\ \mathbf{p}_1\end{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}_0^1 = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4}\\ -\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4}\\ -\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{4}\\ -\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4}\\ \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4}\\ \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{4}\\ \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{v}_1\end{pmatrix} = \mathbf{q}_1^0 \begin{pmatrix}0\\ \mathbf{v}_0\end{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}_1^0 = \bar{\mathbf{q}}_0^1 \begin{pmatrix}0\\ \mathbf{v}_0\end{pmatrix} \mathbf{q}_0^1 = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4}\\ \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4}\\ \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{4}\\ \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}/2\\ 0\\ -\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4}\\ -\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4}\\ -\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{4}\\ -\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Као што је очекивано добија се потпуно ислти резултат као и у случају када се користе матрице ротације. Треба приметити да слагање ротација у изражених у кватернионима нешто захтева мање рачунских операција од слагања ротација изражених у матрицама ротације. За трансформацију вектора, случај је обрнут, односно, рачунски мање захтевна је нотација помоћу матрица ротације. На модерним рачунарима ове разлике су занемариве. Очигледна предност кватерниона је у томе што имају компактнији запис.

Поред претходно наведеног, при рачунању на дигиталном рачунару, уочено је да су кватерниони нумерички стабилнији. Осим тога, услед нумеричког рачунања јединичност кватерниона и ортогоналност матрице ротације може бити нарушено, и зантно је једноставније одржавати јединичност кватерниона, једноставно га нормализујући након сваке операције множења.

3.1.10 Хомогене трансформације

До сада смо разматрали трансформацију координата само услед ротације координатног система. Међутим, јавља се потреба да се, поред ротације, у укупну трансформацију између два координатна система укључи и транслација. На сл. 3.12 су приказана два паралелна координатна система $O_0 - x_0y_0z_0$ и $O_1 - x_1y_1z_1$. Вектором $\mathbf{d}_0^1$, израженим у односу на координатни систем $O_0 - x_0y_0z_0$, је дефинисано растојање координатних почетака система $O_1 - x_1y_1z_1$ и $O_0 - x_0y_0z_0$. С обзиром да су координатни системи паралелни, веза између вектора $\mathbf{p_0}$ и $\mathbf{p_1}$ којим су дефинисане координате тачке П у односу на сваки од ова два координатна система је дата са:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1 . \tag{3.60}$$

Ако је координатни систем $O_1 - x_1y_1z_1$ додатно закренут у односу на $O_0 - x_0y_0z_0$, тада је веза између ових координатних система нешто сложенија и дата са:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1 \tag{3.61}$$

где $\mathbf{R}_0^1$ означава матрицу ротације између координатних система.

Претпоставимо, даље, да се три координатна система $O_0 - x_0y_0z_0$, $O_1 - x_1y_1z_1$ и $O_2 - x_2y_2z_2$ налазе у произвољном релативном односу тј. да им се координатни почеци не поклапају и да им осе нису паралелне. За координате произвољне тачке П, које можемо изразити у односу на било који од ових координатних система, можемо написати:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{p}_1 &= \mathbf{R}_1^2 \cdot \mathbf{p}_2 + \mathbf{d}_1^2. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Заменимо ли (3.62) у (3.61) добијамо релацију

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{R}_1^2 \cdot \mathbf{p}_2 + \mathbf{R}_0^1\mathbf{d}_1^2 + \mathbf{d}_0^1. \tag{3.63}$$

Међутим, веза координатних система $O_0{-}x_0y_0z_0$ и $O_2{-}x_2y_2z_2$ се може изразити директно

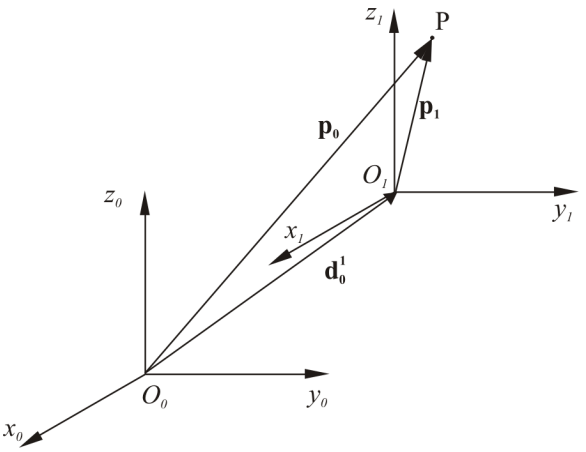
$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^2 \cdot \mathbf{p}_2 + \mathbf{d}_0^2\,. \tag{3.64}$$

па упоређивањем (3.63) и (3.64) следи

$$\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{R}_1^2 \tag{3.65}$$

$$\mathbf{d}_0^2 = \mathbf{d}_0^1 + \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{d}_1^2. \tag{3.66}$$

Матрица ротације $\mathbf{R}_0^2$ се, као и раније, може изразити производом две узастопне матрице ротације $\mathbf{R}_0^1$ и $\mathbf{R}_1^2$. Вектор растојања координатних почетака $\mathbf{d}_0^2$ система $O_0 - x_0y_0z_0$ и $O_2 - x_2y_2z_2$ је изражен као векторски збир вектора $\mathbf{d}_0^1$ и $\mathbf{d}_1^2$, али морамо уочити да је неопходно да се вектор $\mathbf{d}_1^2$ изрази у односу на базни координатни систем $O_0 - x_0y_0z_0$. (уколико желимо да вршимо операције над два вектора, они морају бити изражени у односу на исти координатни систем).



Слика 3.12: Транслација координатног система

Везе (3.65) и (3.66) између координатних система $O_0 - x_0y_0z_0$, $O_1 - x_1y_1z_1$ и $O_2 - x_2y_2z_2$ из претходног примера можемо добити производом матрица формираних од матрице ротације и вектора транслације на следећи начин:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & \mathbf{d}_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^2 & \mathbf{d}_1^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{R}_1^2 & \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{d}_1^2 + \mathbf{d}_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

Лако се може уочити да резултујућа матрица укупне трансформације има исту структуру као и матрице чијим множењем је добијена при чему је матрица укупне ротације дефнисана са (3.65), а вектор транслације изразом (3.66).

Матрица формирана на следећи начин од матрице ротације и вектора транслације између два координатна система

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11}r_{12}r_{13} \\ r_{21}r_{22}r_{23} \\ r_{31}r_{32}r_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} \\ [0 \quad 0 \quad 0] & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{matrica} \\ \text{rotacije} \end{bmatrix}_{3\times3} & \begin{bmatrix} \text{vektor} \\ \text{translacije} \end{bmatrix}_{3\times1} \\ \begin{bmatrix} \text{vektor} \\ \text{perspektive} \end{bmatrix}_{1\times3} & \begin{bmatrix} \text{faktor} \\ \text{skaliranja} \end{bmatrix}_{1\times1} \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

се назива матрицом ***хомогене трансформације*** и обележићемо је са $\mathbf{H}$. Матрица $\mathbf{R}$ дефинише ротацију између два посматрана координатна система, а вектор $\mathbf{d}$ растојање њихових координатних почетака. Вектор из последње врсте матрице $\mathbf{H}$ (вектор $[0 \quad 0 \quad 0]$) се назива вектором перспективе, а члан $\mathbf{H}_{4,4}$ фактором скалирања. У свим примерима који су за нас од интереса, вектор перспективе и фактор скалирања ће бити константни и имаће вредности као у (3.68).

Према томе, помоћу хомогених трансформација се у оквиру исте матрице обједињавају трансформације координата настале услед ротације и транслације једног координатног система у односу на други. Ако је матрица хомогених трансформација између координатних система $O_0 - x_0y_0z_0$, $O_1 - x_1y_1z_1$ дата са:

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & \mathbf{d}_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.69}$$

трансформацију координате ис првог у нулти координатни систем дату једначином (3.61) можемо записати у компактној форми:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_0^1 \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.70}$$

На основу једнакости (3.67) можемо закључити да, је укупна трансформација настала као резултат низа сукцесивних трансформација се, као и у случају ротација, добија узастопним множењем матрица одговарајућих хомогених трансформација редоследом којим су се трансформације догађале. Правила за слагање ротација и редослед трансформација, које су изведене раније за ротације, важе и за хомогене трансформације ***само у случају да се трансформација око текућег координатног система***. Уколико се врше трансформације око ***фиксног*** фиксног координатног система, укуна трансформација се ***не добија*** множењем матрица хомогених трансформација обрнутим редоследом.

Насупрот матрица ротације, матрице хомогених трансформација нису ортогоналне, и ту ортогоналност квари управо вектор транслације. Самим тиме, за матрицу хомогене трансформације ***не важи да је транспонована матрица једнака инверзној***. Међутим, како матрица хомогене трансформације има одређену структуру постоји упрошћен начин рачунања инверзне матрице хомогених трансформација. За матрицу хомогених трансформација између координатних система $O_0 - x_0y_0z_0$, $O_1 - x_1y_1z_1$ која је дата са (3.69) инверзна матрица хомогене трансформације $\mathbf{H}_1^0$ се рачуна као:

$$\mathbf{H}_1^0 = (\mathbf{H}_0^1)^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_0^1)^T & -(\mathbf{R}_0^1)^T\mathbf{d}_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.71}$$

Односно:

$$\mathbf{R}_1^0 = (\mathbf{R}_0^1)^T \tag{3.72}$$

$$\mathbf{d}_1^0 = -(\mathbf{R}_0^1)^T\mathbf{d}_0^1 \tag{3.73}$$

Валидност израза (3.71), је врло лако доказати једноставним множењем матрица $\mathbf{H}_1^0$ и $\mathbf{H}_0^1$ и показивањем да је њихов производ јединична матрица.

По аналогији са ротацијама, хомогене трансформације које одговарају само једном степену слободе кретања у односу на координатне осе називамо *основним* хомогеним трансформацијама. Према томе, основне хомогене трансформације којима се описује само транслаторно кретање су:

$$\mathbf{H}_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.74}$$

где матрица $\mathbf{H}_{x,a}$ означава транслацију дуж осе x за дужину a, матрица $\mathbf{H}_{y,b}$ транслацију дуж осе y за дужину b, а матрица $\mathbf{H}_{z,c}$ транслацију дуж осе z за дужину c. Често се ради асоцијативнијег обележавања уместо $\mathbf{H}_{x,a}$ може срести ознака $Tran_{x,a}$, уместо $\mathbf{H}_{y,b}$ се може срести $Tran_{y,b}$ а $Tran_{z,c}$ уместо $\mathbf{H}_{z,c}$. Основне хомогене трансформације за ротационо кретање су дате следећим изразима:

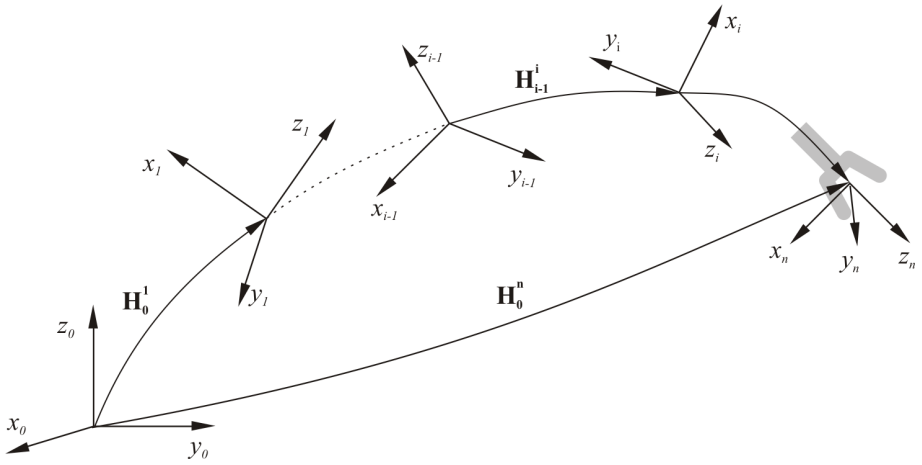
$$\mathbf{H}_{\mathbf{x},\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha & 0 \\ 0 & S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_{\mathbf{y},\beta} = \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_{\mathbf{z},\gamma} = \begin{bmatrix} C\gamma & -S\gamma & 0 & 0 \\ S\gamma & C\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.75}$$

где матрица $\mathbf{H}_{\mathbf{x},\alpha}$ означава ротацију око осе x за угао α матрица $\mathbf{H}_{\mathbf{y},\beta}$ротацију око осе y за угао β, а матрица $\mathbf{H}_{\mathbf{z},\gamma}$ ротацију око осе z за угао γ. Често се уместо $\mathbf{H}_{\mathbf{x},\alpha}$ може срести ознака $Rot_{x,\alpha}$ уместо $\mathbf{H}_{\mathbf{y},\beta}$ се може срести $Rot_{y,\beta}$, а $Rot_{z,\gamma}$ уместо $\mathbf{H}_{\mathbf{z},\gamma}$. У свим овим случајевима је јасно, уколико се обрати пажња на димензије матрица, да се ради о хомогеним трансформацијама, а не о матрицама ротације.

3.2 КИНЕМАТСКИ МОДЕЛ ИНДУСТРИЈСКИХ РОБОТА

Математички апарат који смо развили у претходним одељцима за одређивање трансформација координатних система у простору је веома погодан за опис кретања робота. Наиме, робот се може представити низом крутих сегмената спојених зглобовима који називамо кинематским ланцем (сл. 2.2). Покретањем једног зглоба помера се одговарајући сегмент, а тиме и сви остали сегменти који се налазе "даље", према врху кинематског ланца укључујући и последњи сегмент - хватаљку[1] чији положај и оријентацију, често и током кретања, а сасвим сигурно у одређеним тачкама када је то од интереса за реализацију задатка, морамо остварити. Нека је сваком од сегмената робота, укључујући и хватаљку, придружен координатни систем који је у односу на „свој" сегмент непокретан. Ови координатни системи се називају локалним за разлику од непокретног система у односу на који се кретање локалних координатних система изражава, а који се још назива спољашњим (глобалним или фиксним итд.). Познавањем тачног положаја координатних система сваког од сегмената, као и вредности унутрашњих координата у зглобовима могуће је једнозначно одредити положај и оријентацију хватаљке (сл. 3.13). Овај задатак је познат као директни кинематски проблем.

Обрнути задатак, како одредити унутрашње координате у сваком од зглобова тако да се хватаљка нађе у захтеваној позицији са захтеваном оријентацијом, је познат као инверзни кинематски проблем и није једнозначно решив. Сваки од ових задатака ће касније бити посебно разматран.



Слика 3.13: Низ "локалних" координатних система дуж кинематског ланца робота са матрицама узастопних трансформација и резултујућим положајем хватаљке

Координатни системи се на сегменте могу постављати на различите начине. Једино мора бити испуњен услов да је положај сваког координатног

[1] Последњи сегмент робота може бити, зависно од радног задатка, хватаљка, неки уређај или алат (нпр. апарат за тачкасто или шавно заваривање, глодало, прскалица за бојење, ...).

система у односу на "сопствени" сегмент увек потпуно познат и током времена непроменљив. Међутим, због практичних разлога, одређена систематизација у избору положаја координатних система је неопходна. Опште прихваћен договор о начину постављања координатних система[2] на сегменте робота је познат као Денавит-Хартенбергова или ДХ нотација (конвенција).

3.2.1 Денавит - Хартенбергова нотација

Замислимо две просторно мимоилазне праве (на сл. 3.14 једна је одређена тачкама O_P и O_{i-1}, а друга правцем осе z_i, које су повезане заједничком нормалом[3]. Увођење ДХ нотације ћемо започети разматрањем основних трансформација између два координатна система: $i-1$-вог и i-тог са координатним почецима O_{i-1} и O_i (сл. 3.14) који се налазе на овим правама и чији међусобни положај задовољава следеће услове:

- оса x_i је нормална на осу z_{i-1};
- оса x_i сече осу z_{i-1}.

Уочимо да је између ова два координатна система уметнут помоћни координатни систем са осама x_P, y_P и z_P чији координатни почетак O_p је дефинисан пресеком оса z_{i-1} и x_i.

Размотримо трансформације које је потребно применити да би $i-1$-ви координатни систем довели до поклапања са i-тим.

Укупну трансформацију ћемо поделити у два корака: најпре ћемо $i-1$-ви координатни систем померити тако да се поклопи са помоћним, а затим ћемо га померити тако да се поклопи са i-тим. Са слике се види да је за поклапање координатних почетака O_{i-1} и O_P најпре потребно координатни систем $i-1$ заротирати за угао θ_i око осе z_{i-1} а затим га транслаторно померити за величину d_i дуж исте осе. (Приметите да се осе z_{i-1} и z_P поклапају). Да би се помоћни координатни систем поклопио са i-тим, потребно га је транслаторно померити дуж осе x_P за величину a_i, а затим заротирати, исто око осе x_P, за угао α_i.

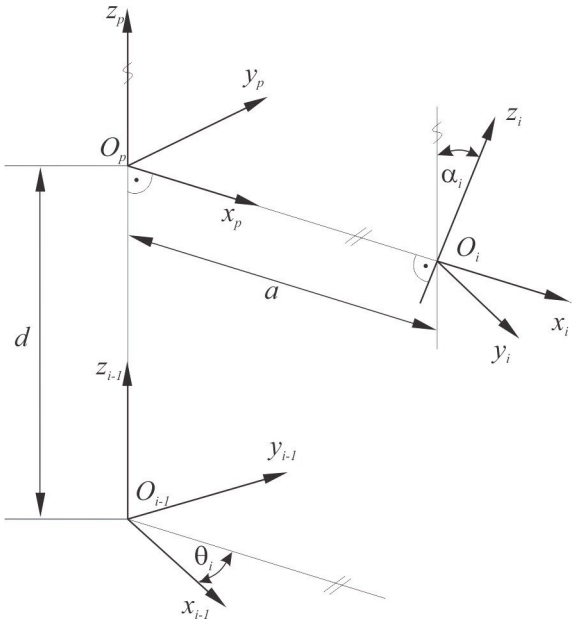
Према томе, да би се $i-1$-ви координатни систем довео до поклапања са i-тим потребно је извршити следеће трансформације

$$\mathbf{H}_{i-1}^{i} = Rot_{z,\theta_i} \cdot Tran_{z,d_i} \cdot Tran_{x,a_i} \cdot Rot_{x,\alpha_i} \tag{3.76}$$

што се може у форми хомогених трансформација (прве две трансформације су обједињене у једну, друге две у другу хомогену трансформацију) изразити

[2] Први систематски начин дефинисања положаја координатних система примењен за моделирање динамике манипулационих робота је предложен од стране М. Вукобратовића али је током времена потиснут ДХ нотацијом.

[3] Постоји само једна права која је истовремено нормална на две произвољне мимоилазне праве. На сл. 3.14 то је права одређена тачкама O_P и O_i.



Слика 3.14: Међусобни однос координатних система при ДХ конвенцији

на следећи начин

$$\mathbf{H}_{i-1}^{P} = Rot_{z,\theta_i} \cdot Tran_{z,d_i} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

$$\mathbf{H}_{P}^{i} = Rot_{x,\alpha_i} \cdot Tran_{x,a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

или у форми јединствене трансформације између $i-1$-вог i-тог координатног система

$$\mathbf{H}_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i \cdot C\alpha_i & S\theta_i \cdot S\alpha_i & a_i \cdot C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i \cdot C\alpha_i & -C\theta_i \cdot S\alpha_i & a_i \cdot S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{3.79}$$

Према томе, укупна трансформација између два координатна система произвољног међусобног положаја али таквог да су испуњена два раније наведена услова, се може описати са четири елементарне трансформације које су обједињене у једну хомогену трансформацију. Другим речима, коришћењем ДХ нотације, укупна трансформација је описана са само четири параметра θ_i, α_i, d_i, и a_i, који се називају Денавит–Хартенберговим (или скраћено ДХ) параметрима.

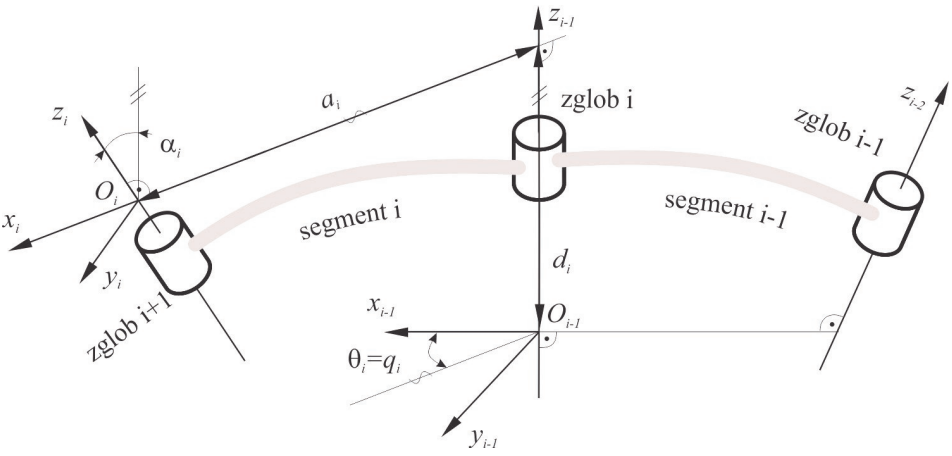
Да би се међусобни положај два координатна система који припадају суседним сегментима роботског механизма, у општем случају, могао описати трансформацијом (3.79) потребно је обезбедити да координатни системи које придружујемо појединачним сегментима механизма задовољавају оба услова наведена на почетку одељка ($x_i \perp z_i$ и x_i сече z_{i-1}).

Стога размотримо два суседна сегмента робота, $i-1$-ви и i-ти (сл. 3.15). Претпоставимо да је координатни систем са почетком O_{i-1} већ постављен. Сегменти су спојени ротационим зглобовима са само једним степеном слободе, а осе обртања зглобова су обележене са z_i, z_{i-1} и z_{i-2}, и мимоилазе се у простору. Тада је могуће одредити заједничку нормалу између оса z_i и z_{i-1} као заједничку нормалу између две мимоилазне праве (на сл. 3.15 је ова заједничка нормала обележена са a_i). Ако у правцу заједничке нормале a_i поставимо осу x_i (смер се може бирати произвољно), а осу y_i одредимо тако да са x_i и z_i образује десни координатни систем, тада координатни системи O_{i-1} и O_i представљају два координатна система чији међусобни положај можемо описати Денавит-Хартенберговим параметрима.

ДХ параметри θ_i, d_i, a_i и α_i између два координатна система који се налазе на два суседна сегмента су дефинисани на следећи начин:

- параметар θ_i је угао између оса x_{i-1} и x_i мерен у равни нормалној на осу z_{i-1};
- параметар d_i је растојање од координатног почетка O_{i-1} до пресека оса x_i и z_{i-1} мерено дуж осе z_{i-1};
- параметар a_i је растојање од осе z_{i-1} до z_i мерено дуж осе x_i;
- параметар α_i је угао од осе z_{i-1} до z_i мерен у равни нормалној на осу x_i;

Параметре θ_i, d_i, a_i и α_i је могуће на сличан начин одредити и у случају линеарног (транслаторног) зглоба, који је приказан на сл. 3.16. Код транслаторног зглоба положај самог зглоба није важан јер ће се приликом



Слика 3.15: ДХ параметри за i-ти ротациони зглоб

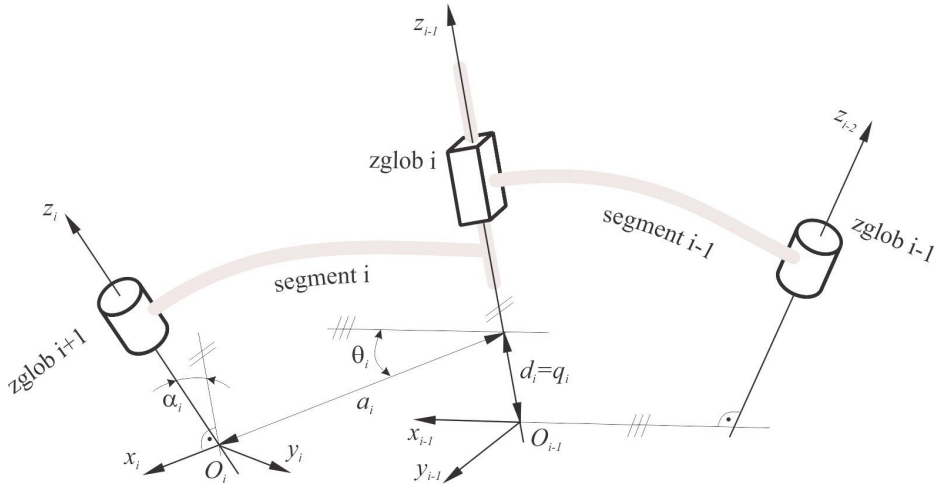
кретања увек на исти начин транслаторно померати део система који се у кинематском ланцу налази после њега. Због тога се координатни систем поставља тако да се параметри упросте, тј. оса z_{i-1} се поставља у правцу издуживања транслаторног зглоба и почетни положај координатног система се бира тако да је $d_i = 0$. Оса x_i се поставља у истом или супротном смеру од вектора $z_{i-1} \times z_i$.

Величина d_i одговара унутрашњој координати q_i. Нулта вредност q_i одговара положају када се координатни почеци O_i и O_{i-1} поклапају. За транслаторни зглоб угао θ_i је непроменљив и представља кинематски параметар, исто као и угао α_i. Када се сегментима датог робота придруже координатни системи и одреде ДХ параметри тада су хомогене матрице трансформације функције само унутрашњих координата q_i у зглобовима.

Напоменимо да слободно тело у простору има шест степени слободе, док се релативни положај два координатна система према ДХ нотацији описује са само са четири параметра. То је могуће због тога што је овде положај координатних система ограничен са два додатна услова ($x_i \perp z_{i-1}$ и x_i сече z_{i-1}) чиме се одузимају два степена слободе.

ДХ параметрима се може придружити одређено физичко значење. Тако, параметар a_i одговара дужини сегманта, α_i представља угао између оса зглобова истог сегмента ("уврнутост"сегмента, енгл. twист), параметар d_i представља смакнутост (енгл. оффсет) координатних почетака O_{i-1} и O_i (у случају правилних геометријских облика сегмената d_i представља смакнутост "центара зглобова") док параметар θ_i представља угао међусобне закренутости $i-1$-вог и i-тог координатног система што је у случају линеарног зглоба конструктивна карактеристика.

У случају ротационог зглоба a_i, d_i, и α_i представљају фиксне параметре механизма док променљива θ_i представља унутрашњу координату q_i (угао закретања између два сегмента). У случају транслаторног зглоба параметри a_i, θ_i и α_i су фиксни параметри механизма, а променљива d_i представља



Слика 3.16: ДХ параметри за i-ти линеарни (транслаторни) зглоб

унутрашњу координату q_i (померај у зглобу). Такође је важно напоменути да при процедури одређивања положаја координатних система који припадају појединим сегментима ни у једном тренутку није вођено рачуна о стварном облику сегмената и стварном положају зглобова. Наиме, кинематски модел робота представљен ДХ нотацијом одговара свим "стварним" механичким конфигурацијама са датим распоредом и типом зглобова, тј. одговара свим конфигурацијама код којих се све осе зглобова налазе на истим местима. Облик самих сегмената не утиче на ДХ параметре што представља предност ДХ нотације.

Треба обратити пажњу да код ДХ нотације постоји неслагање у редном броју зглоба и њему припадајућег координатног система. Наиме, нумерација сегмената кинематског ланца креће од сегмента везаног за подлогу и почиње са 1 $(1, 2, \ldots, n)$. Нумерација зглобова такође почиње од подлоге на исти начин као и код сегмената, али се координатни системи који припадају зглобовима нумеришу другачије. Оса базног зглоба (зглоб којим се робот повезује са подлогом) се увек обележава са z_0, тј. нумерација почиње од нуле. То значи, да је i-ти зглоб први зглоб i-тог сегмента док је одговарајући координатни систем $i-1$-ви што се може видети на сл. 3.15. и сл. 3.16. На исти начин, први зглоб почетног сегмента кинематског ланца (сегмент 1) је зглоб 1, а њему припадајући координатни систем је O_0.

Процедура формирања кинематског модела (постављања координатних система и формирања матрицâ трансформације) почиње идентификацијом оса свих зглобова јер тип и распоред зглобова робота за који формирамо кинематски модел морају бити познати унапред. При одређивању положаја координатних система према ДХ конвенцији треба водити рачуна о неким специфичностима на које ћемо сада указати.

Најпре је у правац осе првог зглоба потребно поставити z_0 осу. Базни координатни систем се може поставити било где на оси z_0 (његов положај није једнозначно одређен и може се изабрати нама најповољнија позиција) а осе x_0 и y_0 треба одредити тако да формирају десни координатни систем. Даље се координатни системи постављају на начин који ће у тексту који следи бити описан. Размотримо, даље, ситуацију која се јавља у случају када две осе зглобова z_{i-1} и z_i припадају истој равни. Ту се могу јавити два случаја:

- осе z_{i-1} и z_i се секу,
- осе z_{i-1} и z_i су паралелне.

У другом случају постоји бесконачно много заједничких нормала оса z_{i-1} и z_i. У том случају се оса x_i бира тако да пролази кроз O_{i-1}. Приметимо да је у том случају d_i једнако нули, а због паралелности оса z_{i-1} и z_i параметар α_i је такође једнак нули. Када је оса x_i одређена, оса y_i се бира тако да оформи десни координатни систем.

У првом случају, када се осе z_{i-1} и z_i секу, x_i се бира као нормала на раван која је дефинисана осама z_{i-1} и z_i док је смер x_i произвољан. Најприроднији избор координатног почетка O_i је у пресеку оса z_{i-1} и z_i мада се може изабрати било која тачка на оси z_i. Треба приметити да је у овом случају параметар једнак нули.

Такође треба обратити пажњу на постављање координатног система на последњи (n-ти) сегмент, тј. на постављање координатног система хватаљке

(сл. 3.17). Координатни почетак O_n се може изабрати произвољно, али треба водити рачуна да се ДХ параметри што више упросте. Због тога се препоручује да се O_n бира симетрично између прстију хватаљке, једино треба обезбедити да је оса z_n паралелна са осом z_{n-1}, а оса хн управна на z_{n-1}.

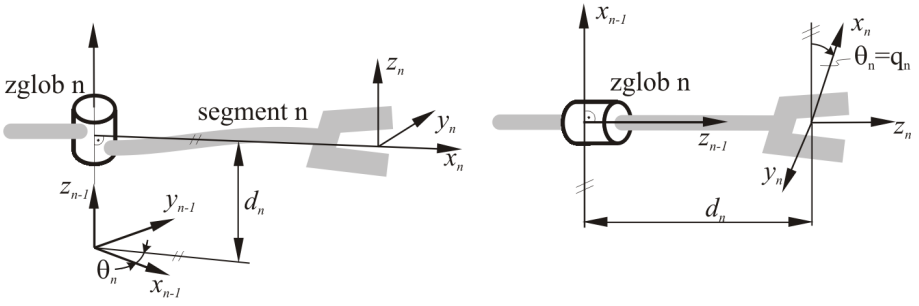
Поступак за формирање кинематског модела робота произвољне механичке конфигурације се може систематизовати и приказати у неколико корака:

1. Лоцирати и означити све осе зглобова од z_0 до z_{n-1}.
2. Поставити базни координатни систем било где на z_0 оси.

   Напомена: кораке 3÷5 понављати за $i = 1$ до $i = n - 1$
3. Лоцирати координатни почетак O_i на месту где заједничка нормала на осе z_i и z_{i-1} пресеца осу z_i. Ако оса z_i пресеца осу z_{i-1} онда O_i поставити у тачку пресека, а ако су осе z_i и z_{i-1} паралелне онда O_i поставити у центар зглоба на оси z_i.
4. Поставити осу x_i дуж заједничке нормале између z_i и z_{i-1} кроз тачку O_i или у правцу који је нормалан на раван одређену осама z_i и z_{i-1} ако се ове осе секу.
5. Поставити y_i тако да се формира десни координатни систем.
6. Поставити координатни систем хватаљке тако да је оса z_n паралелна са осом z_{n-1}, а оса хн управна на z_{n-1}.
7. Формирати таблицу параметара a_i, d_i, α_i , θ_i.
8. Формирати хомогену матрицу трансформације замењујући вредности параметара из таблице, формирати укупну матрицу трансформације множећи редом све матрице од почетне до крајње.

Одавде се, у случају постављања координатних система на сегменте робота сагласно ДХ нотацији, може закључити следеће:

1. координатни системи се постављају у зглобове робота,
2. на сваком сегменту се налазе по два координатна система,



Слика 3.17: Постављање координатног система хватаљке

3. први координани систем (посматрано од почетка (основе, базе)) кинематског ланца припада претходном сегменту, други координатни систем је везан за дотични сегмент и његов положај се мења заједно са променом положаја сегмента.

На описани начин је могуће у потпуности дефинисати положаје свих координатних система и оформити укупну матрицу трансформације која повезује позицију и оријентацију крајњег координатног система кинематског ланца (координатног система хватаљке) изражену у односу на базни (непокретни) координатни систем.

3.2.2 Директни кинематски проблем

Под директним кинематским проблемом подразумевамо одређивање позиције и оријентације координатног система последњег сегмента кинематског ланца у односу на непокретни (базни) координатни систем уколико су познате вредности помераја у зглобовима (угао закретања за ротациони и издужење за транслаторни зглоб). То се може постићи постављањем координатних система по правилима ДХ нотације и одређивањем одговарајућих матрица хомогених трансформација. Илустроваћемо ово са неколико примера.

Пример 3.3.

Одредити таблицу ДХ параметара и матрице хомогених трансформација за равански тросегментни роботски манипулатор приказан на сл. 3.18.

Вредности Денавит - Хартенбергових параметара су дате у следећој табели

Табела 3.1: Денавит - Хартенбергови параметри

Сегмент	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	q_1
2	l_2	0	0	q_2
3	l_3	0	0	q_3

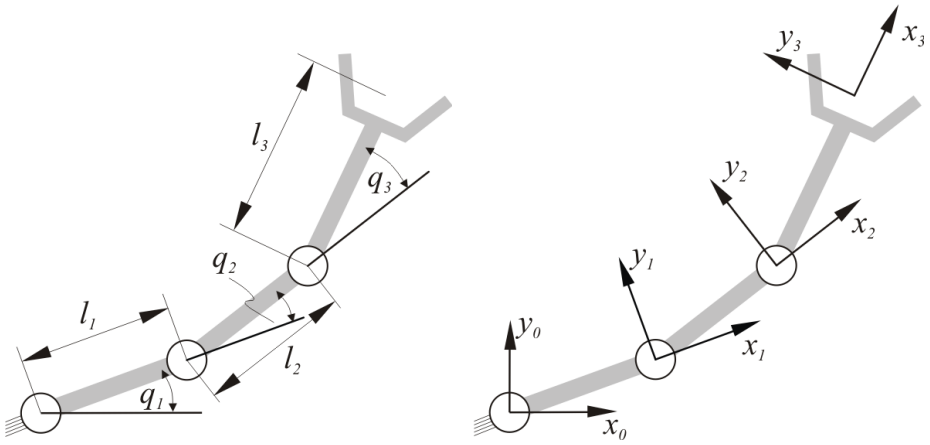
Матрице појединачних трансформација су дате са:

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & l_1C1 \\ S1 & C1 & 0 & l_1S1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & l_2C2 \\ S2 & C2 & 0 & l_2S2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & l_3C3 \\ S3 & C3 & 0 & l_3S3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

док је укупна трансформација дата са

$$\mathbf{H}_0^3 = \mathbf{H}_0^1 \cdot \mathbf{H}_1^2 \cdot \mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} C123 & -S123 & 0 & l_1 \cdot C1 + l_2 \cdot C12 + l_3 \cdot C123 \\ S123 & C123 & 0 & l_1 \cdot S1 + l_2 \cdot S12 + l_3 \cdot S123 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

где је $S123 = \sin(q_1 + q_2 + q_3)$, $C123 = \cos(q_1 + q_2 + q_3)$. Уколико задамо вредности углова q_1, q_2 и q_3 могуће је одредити $\mathbf{H}_0^3$ чиме су одређени матрица



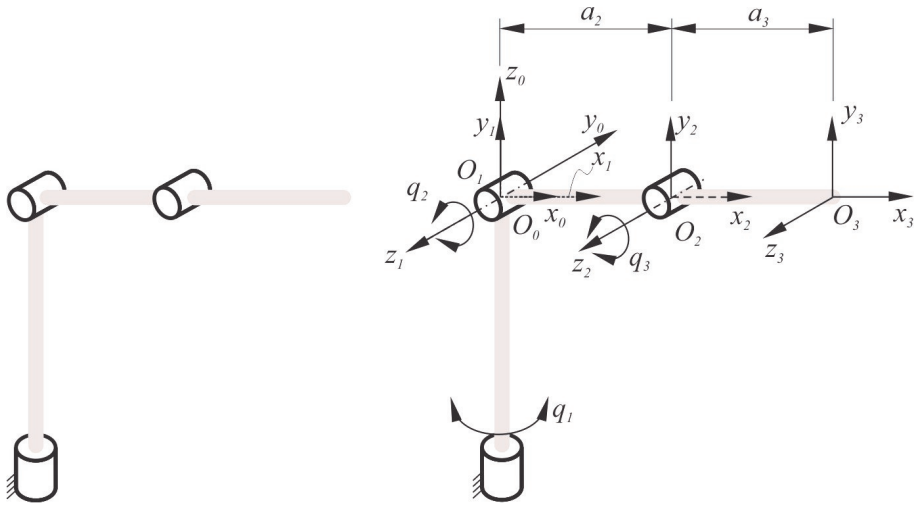
(а) без уцртаних координатних система *(б) са уцртаним координатним системима*

Слика 3.18: Тросегментна раванска конфигурација

ротације и вектор транслације координатног система хватаљке у односу на базни координатни систем. Тиме је директни кинематски задатак решен.

Пример 3.4.

Одредити таблицу ДХ параметара и матрице хомогених трансформација за тросегментну антропоморфну конфигурацију са сл. 3.19 ако су дужине другог и трећег сегмента a_2 и a_3, респективно.



Слика 3.19: Антропоморфна минимална конфигурација без уцртаних и са уцртаним координатним системима

Положаји одговарајућих координатних система према ДХ нотацији су

уцртани на сл. 3.19. док су Денавит - Хартенбергови параметари дати у Табели 3.2:

Табела 3.2: Денавит - Хартенбергови параметри

Сегмент	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$\frac{\pi}{2}$	0	q_1
2	a_2	0	0	q_2
3	a_3	0	0	q_3

Матрице појединачних хомогених трансформација су дате са

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} C1 & 0 & S1 & 0 \\ S1 & 0 & -C1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & a_2C2 \\ S2 & C2 & 0 & a_2S2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & a_3C3 \\ S3 & C3 & 0 & a_3S3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.80}$$

док је укупна трансформациона матрица дата са

$$\mathbf{H}_0^3 = \mathbf{H}_0^1 \cdot \mathbf{H}_1^2 \cdot \mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} C1 \cdot C23 & -C1 \cdot S23 & S1 & C1 \cdot (a_3 \cdot C23 + a_2 \cdot C2) \\ S1 \cdot C23 & S1 \cdot S23 & -C1 & S1 \cdot (a_3 \cdot C23 + a_2 \cdot C2) \\ S23 & C23 & 0 & a_3 \cdot S23 + a_2 \cdot S2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{3.81}$$

где је $S23 = \sin(q_2 + q_3)$, $C23 = \cos(q_2 + q_3)$.

На тај начин је одређена укупна трансформација крајњег координатног система O_3 у односу на базни O_0 у функцији координата у зглобовима. Вектор позиције координатног система O_3 је дефинисан четвртом колоном у матрици (3.81) и његове координате директно одговарају координатама координатног почетка O_3 у односу на O_0. Најчешће се директни кинематски проблем овим сматра решеним. Међутим, с обзиром да нам матрица ротације не даје решење у облику неке од уобичајених репрезентација оријентације координатних система понекад је погодно одредити оријентацију крајњег координатног система у за нас повољнијој форми.

Претпоставимо да желимо да оријентацију координатног система O_3 дефинисану матрицом ротације (3.81) представимо ZYX Ојлеровим угловима. Другим речима, желимо да одредимо Ојлерове углове $\sin\theta$, φ и ψ тако да укупна ротација одговара ротацији која је дефинисана матрицом ротације (3.33). Матрица ротације дефинисана у оквиру хомогене трансформација (3.81) је дата са

$$\mathbf{R}_0^3 = \begin{bmatrix} C1 \cdot C23 & -C1 \cdot S23 & S1 \\ S1 \cdot C23 & S1 \cdot S23 & -C1 \\ S23 & C23 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}.$$

Матрица ротације изражена ZYX Ојлеровим угловима је

$$\mathbf{R}_0^3 = \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\theta & C\varphi \cdot S\theta \cdot S\psi - S\varphi \cdot C\psi & C\varphi \cdot S\theta \cdot C\psi + S\varphi \cdot S\psi \\ S\varphi \cdot C\theta & S\varphi \cdot S\theta \cdot S\psi + C\varphi \cdot C\psi & S\varphi \cdot S\theta \cdot C\psi - C\varphi \cdot S\psi \\ -S\theta & C\theta \cdot S\psi & C\theta \cdot C\psi \end{bmatrix}.$$

С обзиром да обе матрице представљају исту ротацију и треба да дају исти резултат појединачни чланови у овим двема матрицама треба да су једнаки. Имајући у виду да смо већ видели како се могу срачунати ZYX Ојлерови углови на основу познате матрице ротације (3.41) - (3.43), лако се долази до следећих израза:

$$\theta_1 = -\arcsin S23,\ \theta_2 = -\pi + \arcsin S23 \tag{3.82}$$

односно:

$$\theta_1 = -q_2 - q_3,\ \theta_2 = q_2 + q_3 - \pi. \tag{3.83}$$

Остала два зависе од одабира једног од два решења за θ:

$$\psi = \operatorname{arctan2}\left(\frac{C23}{C\theta}, \frac{0}{C\theta}\right) \tag{3.84}$$

$$\psi_1 = \operatorname{arctan2}\left(\frac{C23}{C\theta_1}, 0\right) = \operatorname{arctan2}\left(\frac{C23}{C(-q_2 - q_3)}, 0\right) \tag{3.85}$$

$$\psi_2 = \operatorname{arctan2}\left(\frac{C23}{C\theta_2}, 0\right) = \operatorname{arctan2}\left(\frac{C23}{C(q_2 + q_3 - \pi)}, 0\right) \tag{3.86}$$

Коришћењем парности косинуса и адиционих формула добијамо:

$$\psi_1 = \operatorname{arctan2}(1, 0) = \frac{\pi}{2} \tag{3.87}$$

$$\psi_2 = \operatorname{arctan2}(-1, 0) = -\frac{\pi}{2} \tag{3.88}$$

На сличан начин можемо одредити и φ:

$$\varphi = \operatorname{arctan2}\left(\frac{S1 \cdot C23}{C\theta}, \frac{C1 \cdot C23}{C\theta}\right) \tag{3.89}$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctan2}\left(\frac{S1 \cdot C23}{C\theta_1}, \frac{C1 \cdot C23}{C\theta_1}\right) = \operatorname{arctan2}\left(\frac{S1 \cdot C23}{C(-q_2 - q_3)}, \frac{C1 \cdot C23}{C(-q_2 - q_3)}\right) =$$
$$= \operatorname{arctan2}(S1, C1) = q_1 \tag{3.90}$$

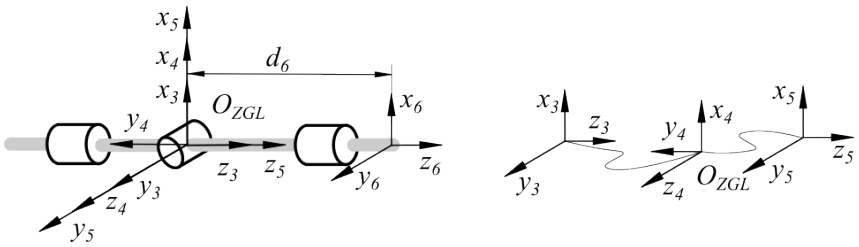
$$\varphi_2 = \operatorname{arctan2}\left(\frac{S1 \cdot C23}{C\theta_1}, \frac{C1 \cdot C23}{C\theta_1}\right) = \operatorname{arctan2}\left(\frac{S1 \cdot C23}{C(q_2 + q_3 - \pi)}, \frac{C1 \cdot C23}{C(q_2 + q_3 - \pi)}\right) =$$
$$= \operatorname{arctan2}(-S1, -C1) = q_1 + \pi \tag{3.91}$$

Тиме је директан кинематски проблем у потпуности решен.

Пример 3.5.

Одредити таблицу ДХ параметара и матрице хомогених трансформација за сферни зглоб чија је кинематска схема приказана на сл. 2.3 и на сл. 3.20а.

Положај координатних система зглоба хватаљке је приказан на сл. 3.20б Денавит - Хартенбергови параметари су дефинисани у Табели 3.3.



Слика 3.20: Сферни (Ојлеров) зглоб - кинематска схема и координатни системи постављени према ДХ нотацији

Табела 3.3: Денавит - Хартенбергови параметри

Сегмент	a_i	α_i	d_i	θ_i
4	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	q_4
5	0	$\frac{\pi}{2}$	0	q_5
6	0	0	d_6	q_6

Појединачне матрице трансформација су:

$$\mathbf{H}_3^4 = \begin{bmatrix} C4 & 0 & -S4 & 0 \\ S4 & 0 & C4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_4^5 = \begin{bmatrix} C5 & 0 & S5 & 0 \\ S5 & 0 & -C5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_5^6 = \begin{bmatrix} C6 & -S6 & 0 & 0 \\ S6 & C6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.92}$$

док је укупна матрица трансформације дата са

$$\mathbf{H}_3^6 = \mathbf{H}_3^4 \cdot \mathbf{H}_4^5 \cdot \mathbf{H}_5^6 = \\ = \begin{bmatrix} C4 \cdot C5 \cdot C6 - S4 \cdot S6 & -C4 \cdot C5 \cdot S6 - S4 \cdot C6 & C4 \cdot S5 & C4 \cdot S5 \cdot d_6 \\ S4 \cdot C5 \cdot C6 + C4 \cdot S6 & -S4 \cdot C5 \cdot S6 + C4 \cdot C6 & S4 \cdot S5 & S4 \cdot S5 \cdot d_6 \\ -S5 \cdot C6 & S5 \cdot S6 & C5 & C5 \cdot d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.93}$$

чиме је задатак решен. Приметимо да матрица ротације из (3.93) одговара матрици ротације када је оријентација задата ZYZ Ојлеровим угловима. Вредност ротације за угао q_4 одговара углу φ, за угао q_5 углу θ, а за угао q_6 углу ψ. То је и разлог што се сферни зглоб често назива Ојлеровим зглобом.

Пример 3.6.

У овом примеру ћемо приказати формирање кинематског модела стандардног индустријског манипулационог робота ПУМА, антропоморфног типа, који има шест степени слободе и све зглобове ротационе. Кинематска схема робота је приказана на сл. 3.21. Треба уочити да је конструктивно решење зглоба хватаљке такво да се све три осе секу у једној тачки, тј. зглоб хватаљке

представља Ојлеров зглоб. Координатни системи, постављени у складу са ДХ нотацијом су приказани на сл. 3.21. а одговарајући ДХ параметри су дати у следећој табели:

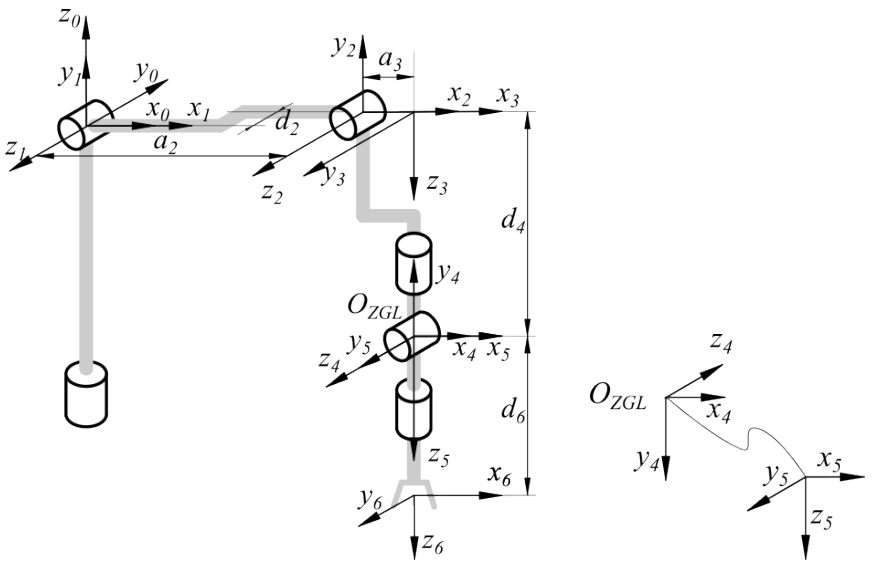
Табела 3.4: Денавит - Хартенбергови параметри

Сегмент	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$\frac{\pi}{2}$	0	q_1
2	a_2	0	d_2	q_2
3	a_3	$\frac{\pi}{2}$	0	q_3
4	0	$-\frac{\pi}{2}$	d_4	q_4
5	0	$\frac{\pi}{2}$	0	q_5
6	0	0	d_6	q_6

Треба приметити да се ДХ параметри дати у овој табели нису једноставно надовезивање параметара из предходна два примера датих у табелама 3.2 и 3.3. Основна разлика потиче од неодређености координатног система $O_3 - x_3y_3z_3$ у оба претходна примера. У примеру 3.3 координатни систем $O_3{-}x_3y_3z_3$ представља врх робота и он се поставља произвољно. Најчешће, али не обавезно, да буде паралелан са претходним координатним системом $O_2{-}x_2y_2z_2$ само на врху робота. У примеру 3.5 координатни систем $O_3{-}x_3y_3z_3$ представља почетни координатни систем и он се поставља било где дуж осе зглоба где су позиција и оријентација осе x_3 практично произвољне. Насупрот томе у случају да имамо цео модел робота, позиција координатон почетка O_3 коринантог система три је једнозначно дефинисана и она се налази дуж заједничке нормале на осе z_2 и z_3, која такође одређује правац осе x_3. Из тог разлога ДХ параметри за трећи и четврти зглоб у табели 3.4 се разликују од оних у претходна два примера (3.2 и 3.3).

Матрице појединачних хомогених трансформација дате су са

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} C1 & 0 & S1 & 0 \\ S1 & 0 & -C1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & a_2C2 \\ S2 & C2 & 0 & a_2S2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} C3 & 0 & S3 & a_3C3 \\ S3 & 0 & -C3 & a_3S3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_3^4 = \begin{bmatrix} C4 & 0 & -S4 & 0 \\ S4 & 0 & C4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.94}$$
$$\mathbf{H}_4^5 = \begin{bmatrix} C5 & 0 & S5 & 0 \\ S5 & 0 & -C5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_5^6 = \begin{bmatrix} C6 & -S6 & 0 & 0 \\ S6 & C6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Слика 3.21: Индустријски манипулациони робот ПУМА: а) кинематска схема и б) раздвојени координатни системи зглоба хватаљке

Укупна матрица трансформације се може добити множењем појединачних матрица трансформације. Израчунајмо најпре $\mathbf{H}_3^6$:

$$\mathbf{H}_3^6 = \mathbf{H}_3^4 \cdot \mathbf{H}_4^5 \cdot \mathbf{H}_5^6 = \begin{bmatrix} C4C5C6 - S4S6 & -C4C5S6 - S4C6 & C4S5 & d_6C4S5 \\ S4C5C6 + C4S6 & -S4C5S6 + C4C6 & S4S5 & d_6S4S5 \\ -S5C6 & S5S6 & C5 & d_4 + d_6C5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.95}$$

Овај резултат се само незнатно разликује од резултата из примера 3.5, и то само транслацији у z правцу, јер је додато померање дуж осе z_3 за величину d_4.

Укупна трансформација између првог и трећег координатног система је

$$\mathbf{H}_1^3 = \mathbf{H}_1^2 \cdot \mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} C23 & 0 & S23 & a_2C2 + a_3C23 \\ S23 & 0 & -C23 & a_2S2 + a_3S23 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.96}$$

при чему су коришћене познате релације из тригонометрије

$$C23 = C2C3 - S2S3$$
$$S23 = S2C3 + C2S3$$

па за укупну трансформацију између нултог и трећег координатног система добијамо:

$$\mathbf{H}_0^3 = \mathbf{H}_0^1 \cdot \mathbf{H}_1^3 = \begin{bmatrix} C1C23 & S1 & C1S23 & C1(a_2C2 + a_3C23) + d_2S1 \\ S1C23 & -C1 & S1S23 & S1(a_2C2 + a_3C23) - d_2C1 \\ S23 & 0 & -C23 & a_2S2 + a_3S23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.97}$$

Коначно, множећи матрице трансформеције $\mathbf{H}_0^3$ и $\mathbf{H}_3^6$ добијамо укупну трансформацију $\mathbf{H}_0^6$:

$$\mathbf{H}_0^6 = \mathbf{H}_0^1 \cdot \mathbf{H}_1^6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.98}$$

где је

$$\begin{aligned} r_{11} &= C1\,[C23(C4C5C6 - S4S6) - S23S5C6] + S1\,[S4C5C6 + C4S6] \\ r_{12} &= C1\,[C23(-C4C5S6 - S4C6) + S23S5S6] + S1\,[-S4C5S6 + C4C6] \\ r_{12} &= C1\,[C23C4S5 + S23C5] + S1S4S5 \\ r_{21} &= S1\,[C23(C4C5C6 - S4S6) - S23S5C6] - C1\,[S4C5C6 + C4S6] \\ r_{22} &= S1\,[C23(-C4C5S6 - S4C6) + S23S5S6] - C1\,[-S4C5S6 + C4C6] \\ r_{23} &= S1\,[C23C4S5 + S23C5] - C1S4S5 \\ r_{31} &= S23(C4C5C6 - S4S6) + C23S5C6 \\ r_{32} &= S23(-C4C5S6 - S4C6) - C23S5S6 \\ r_{33} &= S23C4S5 - C23C5 \\ p_x &= C1(a_2C2 + C23(a_3 + d_6C4S5) + S23(d_4 + d_6C5)) + S1(d_2 + d_6S4S5) \\ p_y &= S1(a_2C2 + C23(a_3 + d_6C4S5) + S23(d_4 + d_6C5)) - C1(d_2 + d_6S4S5) \\ p_z &= a_2S2 + a_3S23 + d_6S23C4S5 - C23(d_4 + d_6C5) \end{aligned} \tag{3.99}$$

Једначине (3.99) конституишу кинематички модел робота ПУМА и представљају основу за кинематску анализу овог роботског манипулатора.

3.2.3 Инверзни кинематски проблем

Инверзни кинематски проблем је задатак одређивања координата у зглобовима робота (углова у ротационим и издужења (помераја) у транслаторним, тј. q_1, q_2, ..., q_6) које обезбеђују да хватаљка робота оствари унапред захтевану позицију и оријентацију у односу на базни координатни систем. Овај проблем је знатно сложенији од директног кинематског проблема и не даје увек једнозначно решење. Имајући у виду да се хомогена матрица укупне трансформације састоји од матрице ротације и вектора транслације произилази да је потребно симултано решити скуп од 12 тригонометријских

нелинеарних једначина. Приказаћемо два основна начина решавања овог проблема: аналитички и нумерички. Аналитички добијено решење има све предности које свако аналитичко решење има (могућност анализе израза којим је решење дато и уочавање специјалних случајева (код нас су најинтересантније сингуларне конфигурације), компактан израз који захтева најмањи број рачунских операција при аплицирању на рачунар, ...), али је пут до решења веома сложен. Нумеричко решење добијамо коришћењем рачунара и избегавамо заморно рачунање, али као резултат добијамо само број и не можемо га користити као решење у аналитичком облику. Са два наредна примера илустроваћемо аналитичко решавање инверзног кинематског проблема.

Пример 3.7.

Илустроваћемо најпре, решавање инверзног кинематског задатка на једноставном примеру тросегментног механизма приказаног на сл. 3.18. Нека је задато да крај трећег сегмента (уствари, координатни почетак система O_3) заузима позицију дефинисану координатама (x, y) и да је његова оријентација одређена углом Φ где важи $\Phi = q_1 + q_2 + q_3$.

Предуслов за решавање овог задатка је постојање кинематског модела, али подсећамо да је он већ формиран у Примеру 3.3. Израз за коначну трансформацију од базног до крајњег координатног система (која је такође већ изведена у Примеру 3.3), с обзиром на постављени задатак, можемо написати у нешто измењеној форми:

$$\mathbf{H}_0^3 = \begin{bmatrix} C\Phi & -S\Phi & 0 & x \\ S\Phi & C\Phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.100}$$

при чему важи

$$C\Phi = C123 \tag{3.101}$$

$$S\Phi = S123 \tag{3.102}$$

$$x = l_1 \cdot C1 + l_2 \cdot C12 + l_3 \cdot C123 \tag{3.103}$$

$$y = l_1 \cdot S1 + l_2 \cdot S12 + l_3 \cdot S123. \tag{3.104}$$

На основу слике сл. 3.18, жељене позиције врха робота (x, y), задатог жељеног угла Φ и дужине трећег сегмента l_3 може се одредити жељена позиција другог зглоба:

$$x_2 = x - l_3 C\Phi \tag{3.105}$$

$$y_2 = y - l_3 S\Phi \tag{3.106}$$

Уз помоћ једнакости (3.101 - 3.104) се лако добија ју једнакости на основу којих ћемо срачунати углове у прва два зглоба:

$$x_2 = l_1 \cdot C1 + l_2 \cdot C12 \tag{3.107}$$

$$y_2 = l_1 \cdot S1 + l_2 \cdot S12. \tag{3.108}$$

Ако квадрирамо и саберемо једначине (3.107) и (3.108) добијамо

$$x_2^2 + y_2^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 C2 \tag{3.109}$$

одакле следи

$$C2 = \frac{x_2^2 + y_2^2 - l_1^2 + l_2^2}{2l_1 l_2}$$

на основу чега се добја:

$$q_2 = \pm \arccos \frac{x_2^2 + y_2^2 - l_1^2 + l_2^2}{2l_1 l_2}. \tag{3.110}$$

Пошто је угао q_2 одређен пређимо на одређивање угла q_1. Напишимо изразе за x и y у форми

$$\begin{aligned} x_2 &= k_1 \cdot C1 - k_2 \cdot S1 \\ y_2 &= k_1 \cdot S1 + k_2 \cdot C1 \end{aligned}$$

где је

$$\begin{aligned} k_1 &= l_1 + l_2 \cdot C2 \\ k_2 &= l_2 \cdot S2. \end{aligned} \tag{3.111}$$

Сада се на основу израза за x_2 и y_2 једноставном методом елиминације може добити:

$$\sin\theta_1 = \frac{-x_2 k_2 + y_2 k_1}{k_1^2 + k_2^2} \tag{3.112}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{x_2 k_1 + y_2 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \tag{3.113}$$

Како је именилац оба израза исти и већи од нуле, лако добијамо коначни израз за одређивање θ_1

$$\theta_1 = \arctan2(-x_2 k_2 + y_2 k_1, x_2 k_1 + y_2 k_2) \tag{3.114}$$

На крају се вредност за q_3 може одредити из

$$q_3 = \Phi - q_2 - q_1. \tag{3.115}$$

Тиме је задатак потпуно решен.

Приметимо да одабран знака q_2 у једначини (3.110) утиче на k_2 што утиче на вредност q_1 и коначно q_3. Самим тиме овај систем има два различита али подједнако тачна решења.

Пример 3.8.

Следећи пример којим ћемо илустровати аналитичко решавање инверзног кинематског задатка се односи на тросегментну антропоморфну конфигурацију приказану на сл. 3.19. Потребно је одредити углове у зглобовима q_1, q_2 и q_3 ако је тачка коју треба да досегне врх робота дата координатама (x, y, z).

С обзиром да робот има само три степена слободе није могуће управљати и оријентацијом последњег координатног система, већ се може обезбедити само захтевана позиција $\mathbf{p}_z = [x, y, z]^T$. На основу вектора позиције из матрице укупне хомогене трансформације (видети израз (3.81)) можемо писати

$$x = C1 \cdot (a_3 C23 + a_2 C2) \tag{3.116}$$
$$y = S1 \cdot (a_3 C23 + a_2 C2) \tag{3.117}$$
$$z = a_3 \cdot S23 + a_2 \cdot S2. \tag{3.118}$$

Да би одредили q_1 помножимо (3.116) са $S1$ а (3.117) са $C1$ на основу чега следи

$$x \cdot S1 = C1 \cdot S1(a_3 C23 + a_2 C2) \tag{3.119}$$
$$y \cdot C1 = S1 \cdot C1(a_3 C23 + a_2 C2) \tag{3.120}$$

Ако (3.119) одузмемо од (3.120)) следи

$$x \cdot S1 - y \cdot C1 = 0$$

одакле добијамо

$$q_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi$$

Да би одредили q_3 помножимо (3.116) са $C1$, а (3.117) са $S1$

$$x \cdot C1 = C1^2 \cdot (a_3 C23 + a_2 C2) \tag{3.121}$$
$$y \cdot S1 = S1^2 \cdot (a_3 C23 + a_2 C2). \tag{3.122}$$

Ако (3.121) и (3.122) саберемо

$$x \cdot C1 + y \cdot S1 = (S1^2 + C1^2) \cdot (a_3 \cdot C23 + a_2 \cdot C2) \tag{3.123}$$
$$z = a_3 \cdot S23 + a_2 \cdot S2 \tag{3.124}$$

па затим изразе (3.123) и (3.124) квадрирамо и онда следи:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot C1^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot C1 \cdot S1 + y^2 \cdot S1^2 = \\ = a_3^2 \cdot C23^2 + 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot C23 \cdot C2 + a_2^2 \cdot C2^2 \end{aligned} \tag{3.125}$$
$$z^2 = a_3^2 \cdot S23^2 + 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot S23 \cdot S2 + a_2^2 \cdot S2^2 \tag{3.126}$$

Када једначине (3.125) и (3.126) саберемо, добијамо:

$$\begin{aligned} z^2 + (x \cdot C1 + y \cdot C1)^2 = & (S23^2 + C23^2) \cdot a_3^2 + (S2^2 + C2^2) \cdot a_2^2 + \\ & + 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot (C23 \cdot C2 + S23 \cdot S2) \end{aligned}$$

одакле следи

$$C3 = \frac{(x \cdot C1 + y \cdot S1)^2 + z^2 - a_3^2 - a_2^2}{2 \cdot a_3 \cdot a_2} \tag{3.127}$$

Па коначно следи

$$q_3 = \pm \arccos \frac{(x \cdot C1 + y \cdot S1)^2 + z^2 - a_3^2 - a_2^2}{2 \cdot a_3 \cdot a_2}. \tag{3.128}$$

чиме је угао q_3 одређен.

Одредимо сада угао q_2. Најпре у изразима (3.123) и (3.124) синус и косинус збира углова $(q_2 + q_3)$ раставимо помоћу адиционих теорема на основу чега се добија

$$C1 \cdot x + S1 \cdot y = a_3 \cdot C2 \cdot C3 - a_3 \cdot S2 \cdot S3 + a_2 \cdot S2 \tag{3.129}$$

$$z = S2(a_3 C3 + a_2) + a_3 C2 S3. \tag{3.130}$$

Слично претходном примеру уведимо смене:

$$\begin{aligned} k_1 &= a_2 + a_3 \cdot C3 \\ k_2 &= a_3 \cdot S3. \end{aligned} \tag{3.131}$$

Тиме добијамо нешто компаткније форме једначина (3.129) и (3.130):

$$C1 \cdot x + S1 \cdot y = k_1 \cdot C2 - k_2 \cdot S2 \tag{3.132}$$

$$z = k_1 \cdot S2 + k_2 \cdot C2. \tag{3.133}$$

Сада опет методом елиминације врло лако добијамо $S2$ и $C2$:

$$S2 = \frac{-k_2 \cdot (C1 \cdot x + S1 \cdot y) + k_1 \cdot z}{k_1^2 + k_2^2}$$

$$C2 = \frac{k_1 \cdot (C1 \cdot x + S1 \cdot y) + k_2 \cdot z}{k_1^2 + k_2^2}$$

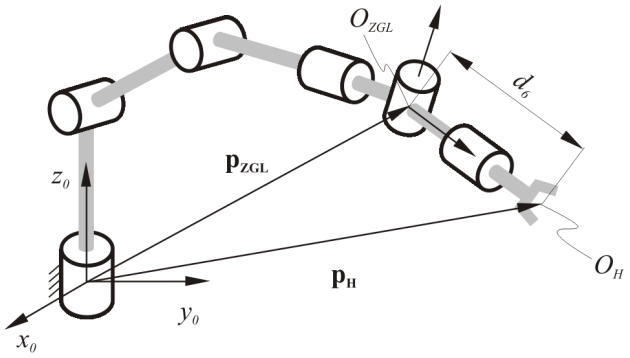
одакле одређујемо угао q_2 као

$$q_2 = \arctan2(-k_2(C1x + S1y) + k_1 z,\ k_1(C1x + S1y) + k_2 z) \tag{3.134}$$

чиме је задатак решен. Треба напоменути да избором "+"или "−" знака у (3.128) бирамо једно од два могућа решења („лакат горе“ или „лакат доле“). Тиме се илуструје да решење инверзног кинематског задатка није јединствено.

3.2.4 Распрезање укупне конфигурације робота на минималну конфигурацију и зглоб хватаљке

У предтходном одељку смо илустровали решавање задатка инверзне кинематике аналитичким начином и као што смо видели, у случају робота који има шест степени слободе тај задатак је изузетно сложен. Стога се прибегава поједностављењу проблема делећи га на два једноставнија подзадатка.



Слика 3.22: Распрезање укупне механичке конфигурације на минималну конфигурацију и зглоб хватаљке

Подсетимо се да је особина сферног зглоба који се поставља на врх минималне конфигурације (постала је пракса да се углавном користе овакви зглобови код индустријских робота) да се све три осе зглобова (z_4, z_5 и z_6) секу у једној тачки. Обележимо ту тачку, на пример, са O_{ZGL} и назовимо је центром зглоба (сл. 3.22). Без обзира на вредности углова q_4, q_5 и q_6 положај тачке O_{ZGL} се неће променити што значи да је њена позиција функција само q_1, q_2 и q_3. Осим тога, задавањем вредности углова q_4, q_5 и q_6 можемо дефинисати оријентацију хватаљке. На основу тога, укупни задатак инверзне кинематике можемо да поделимо на задатак одређивања *инверзне позиције* и *инверзне оријентације*.

Нека је оријентација хватаљке задата матрицом $\mathbf{R}$ а позиција вектором $\mathbf{p}_H$. Растојање координатног система хватаљке од тачке O_{ZGL} је константно и износи d_6 (видети Пример 3.5). Оријентација хватаљке је одређена правцем осе z_6 координатног система O_6.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0^6(q_1, ..., q_6) &= \mathbf{R} \\ \mathbf{p}_0^6(q_1, ..., q_6) &= \mathbf{p}_H \end{aligned} \tag{3.135}$$

Треба уочити да вектор од тачке O_{ZGL} до $O_6 \equiv O_H$ има правац осе z_6 а интензитет d_6. Стога се вектор $\vec{O_{ZGL}O_6}$ може изразити као $d_6 \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{k} = d_6 \cdot \mathbf{R} \cdot [0,0,0]^T$, где $[0,0,0]^T$ представља орт $\mathbf{k}$ осе z_6. Према томе, вектор позиције центра зглоба ($\mathbf{p}_{ZGL}$) може се одредти из израза.

$$\mathbf{p}_{ZGL} = \mathbf{p}_H - d_6 \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{k} \tag{3.136}$$

или у развијеној форми

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{ZGLx} \\ \mathbf{p}_{ZGLy} \\ \mathbf{p}_{ZGLz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{Hx} - d_6 r_{13} \\ \mathbf{p}_{Hy} - d_6 r_{23} \\ \mathbf{p}_{Hz} - d_6 r_{33} \end{bmatrix}.$$

Из овог система од три једначине се могу одредити вредности координата зглобова q_1, q_2 и q_3 с обзиром да је $\mathbf{p}_{ZGL}$ функција само ове три променљиве. Још преостаје да се одреди оријентација координатног система хватаљке у

односу на координатни систем O_3. Имајући у виду да је укупна матрица ротације $\mathbf{R}$ позната, можемо је написати на следећи начин

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0^3 \cdot \mathbf{R}_3^6 \tag{3.137}$$

одакле следи

$$\mathbf{R}_3^6 = \left(\mathbf{R}_0^3\right)^{-1}\mathbf{R} = \left(\mathbf{R}_0^3\right)^T\mathbf{R} \tag{3.138}$$

Према томе, за роботе који поседују шест степени слободе и сферни зглоб, алгоритам одређивања инверзне кинематике се може свести на следећа три корака

корак 1 одредити q_1, q_2 и q_3 из услова

$$\mathbf{p}_{ZGL} = \mathbf{p}_H - d_6 \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{k}$$

корак 2 користећи вредности за q_1, q_2 и q_3 одређене у претходном кораку срачунати $\mathbf{R}_0^3$.

корак 3 наћи, q_4, q_5 и q_6 који одговарају мартици ротације

$$\mathbf{R}_3^6 = \left(\mathbf{R}_0^3\right)^{-1}\mathbf{R} = \left(\mathbf{R}_0^3\right)^T\mathbf{R}$$

чиме се сложеност проблема знатно умањује.

Пример 3.9.

За робот антропоморфне конфигурације са шест степени слободе са сл. 3.22 решити инверзни кинематски проблем распрезањем укупне механичке конфигурације на минималну конфигурацију и зглоб хватаљке.

Први део задатка (одређивање q_1, q_2 и q_3) је већ решен у Примеру 3.8. уз напомену да врх минималне конфигурације са координатама $[x, y, z]^T$ треба заменити центром зглоба хватаљке O_{ZGL} чији положај се одређује из израза $\mathbf{p}_{ZGL} = \mathbf{d}_H - d_6 \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{k}$.

Други део задатка представља одређивање координата зглобова хватаљке q_4, q_5 и q_6 тако да се оствари захтевана оријентација. Подсетимо се да углови q_4, q_5 и q_6 одговарају ZYZ Ојлеровим угловима израженим у односу на координатни систем $O3 - x_3y_3z_3$. Онда је могуће да се, на начин сличан одређивању Ојлерових углова за познату матрицу ротације као у Примеру 3.5, одреде тражени углови q_4, q_5 и q_6.

Наиме, ако је матрица ротације дата са:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

а матрица ротације дефинисана ZYZ Ојлеровим угловима са:

$$\mathbf{R}_3^6 = \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\theta \cdot C\psi - S\varphi \cdot S\psi & -C\varphi \cdot C\theta \cdot S\psi - S\varphi \cdot C\psi & C\varphi \cdot S\theta \\ S\varphi \cdot C\theta \cdot C\psi + C\varphi \cdot S\psi & -S\varphi \cdot C\theta \cdot S\psi + C\varphi \cdot C\psi & S\varphi \cdot S\theta \\ -S\theta \cdot C\psi & S\theta \cdot S\psi & C\theta \end{bmatrix}$$

тада се на основу поклапања матрица и може писати

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C4C5C6 - S4S6 & -C4C5S6 - S4C6 & C4S5 \\ S4C5C6 + C4S6 & -S4C5S6 + C4C6 & S4S5 \\ -S5 \cdot C6 & S5 \cdot S6 & C5 \end{bmatrix}$$

На основу претходних једначина и израза (3.38) - (3.40) добијамо

$$q_5 = \pm \arccos r_{33} \tag{3.139}$$

$$q_4 = \arctan2(\frac{r_{23}}{Sq_5}, \frac{r_{13}}{Sq_5}) \tag{3.140}$$

$$q_6 = \arctan2(\frac{r_{32}}{Sq_5}, -\frac{r_{31}}{Sq_5}). \tag{3.141}$$

Оба решења дегенеришу када је $\sin q_5 = 0$ па у том случају једино можемо да одредимо збир или разлику координата зглобова q_4 и q_6. У ствари, уколико је $q_5 = 0$ тада се осе ротација четвртог и шестог зглоба поклапају. Одатле следи да се жељена закренутост хватаљке може постићи било којом комбинацијом углова ротације у зглобовима 4 и 6 за које је испуњен услов да је њихов збир једнак жељеном углу закретања хватаљке.

ЛИТЕРАТУРА

Angeles J., *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems - Theory, Methods and Algorithms*, Springer-Verlag, 2003.

Asada H., Slotine J.J., *Robot Analysis and Control*, John Wiley and sons, 1985.

Craig J., *Introduction to Robotics: Mechanics & Control,* Addison–Wesley, 1986.

Koren Y., *Robotics for Engineers*, McGraw-Hill, 1985.

Paul E. Sandin, *Robot mechanisms and mechanical devices*, McGraw-Hill, Inc., 2003

Sciavicco L., Siciliano B., *Modeling and Control of Robot Manipulators*, McGraw-Hill, 1996.

Selig J.M., *Introductory Robotics*, Prentice – Hall, 1992.

Siciliano B., Khatib O. (Eds.), *Springer handbook of robotics*, Springer-Verlag, 2008.

Spong M., Hutchinson S., Vidyasagar M., *Robot Modeling and Control*, John Wiley & Sons Inc., 2006.

Vukobratović M., (u saradnji sa Đurović M., Hristić D., Karan B., Kirćanski M., Kirćanski N., Stokić D., Vujić D., Živković V.), *Uvod u robotiku, Institut Mihajlo Pupin,* Beograd, 1988.

Vukobratović M., Cvetković V., Kirćanski M., *Kinamatički i dinamički prilaz sinezi kretanja manipulacionih robota*, Institut Mihajlo Pupin, Beograd, 1981

4. КИНЕМАТСКИ МОДЕЛ РОБОТА II: ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА КИНЕМАТИКА

У претходном поглављу су успостављене релације између вредности унутрашњих координата (координата у зглобовима) механичке конфигурације и позиције и оријентације хватаљке робота (директни кинематски проблем). Такође је показано како се срачунавају координате у зглобовима робота које обезбеђују жељену позицију и оријентацију хватаљке (инверзни кинематски проблем). У оба случаја је успостављена веза између унутрашњих и спољашњих координата у једном дискретном положају.

Суштински важан задатак представља реализација координисаног кретања зглобова робота у циљу остваривања жељене трајекторије хватаљке. Да би се овај задатак решио потребно је успоставити везу између брзина у зглобовима робота и резултујуће брзине кретања хватаљке. Јакобијан (или јакобијева матрица) којом се ово пресликавање успоставља представља основу за решавање ове класе задатака. Осим тога, у оквиру овог поглавља ће бити обрађене основе диференцијалне кинематике, начини за срачунавање елемената јакобијеве матрице, као и нумеричко решавање инверзног кинематског проблема.

4.1 ОСНОВЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ КИНЕМАТИКЕ

У реалном роботском систему се информације о тренутним вредностима унутрашњих координата у зглобова механизма узимају у дискретним тренуцима времена који су дефинисани величином временског интервала узорковања (*енгл.* самплинг тиме). Стварну брзину кретања зглоба је, према томе, немогуће потпуно тачно знати већ се она може приближно одредити (проценити) као количник помераја који је одређен разликом два узастопна мерења и протеклог времена. У случају да је временски интервал узорковања константан, одређивање тренутне брзине се своди на одређивање малих диференцијалних кретања током интервала узорковања. Стога ћемо се у овом одељку позабавити неким, нама потребним, аспектима диференцијалне кинематике.

4.1.1 Основне особине диференцијалних ротација

Напишимо матрицу ротације око x осе (3.4) за инфинитезимално мали угао $d\Phi_x$

$$\mathbf{R}_x(d\Phi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(d\Phi_x) & -\sin(d\Phi_x) \\ 0 & \sin(d\Phi_x) & \cos(d\Phi_x) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d\Phi_x \\ 0 & d\Phi_x & 1 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

где, с обзиром да се ради о малим угловима, важи $\sin(d\Phi_x) \approx d\Phi_x$ и $\cos(d\Phi_x) \approx 1$. На сличан начин се могу извести матрице ротације и за инфинитезималне ротације око оса y и z, $\mathbf{R}_y(d\Phi_y)$ и $\mathbf{R}_z(d\Phi_z)$. Множећи матрице $\mathbf{R}_x(d\Phi_x)$ и

$\mathbf{R}_y(d\Phi_y)$ добијамо

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_x\left(d\Phi_x\right)\cdot\mathbf{R}_y\left(d\Phi_y\right)&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-d\Phi_x\\0&d\Phi_x&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&d\Phi_y\\0&1&0\\-d\Phi_y&0&1\end{bmatrix}=\\&=\begin{bmatrix}1&0&d\Phi_y\\d\Phi_x d\Phi_y&1&-d\Phi_x\\-d\Phi_y&d\Phi_x&1\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&0&d\Phi_y\\0&1&-d\Phi_x\\-d\Phi_y&d\Phi_x&1\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.2}$$

где смо мале величине другог реда $d\Phi_x\cdot d\Phi_y$ занемарили. Ако сада заменимо редослед матрица које треба помножити видећемо да ће производ $\mathbf{R}_y(d\Phi_y)\cdot\mathbf{R}_x(d\Phi_x)$ дати исти резултат као у претходном случају, па се може закључити да за инфинитезималне ротације важи особина комутативности, тј.

$$\mathbf{R}_x\left(d\Phi_x\right)\cdot\mathbf{R}_y\left(d\Phi_y\right)=\mathbf{R}_y\left(d\Phi_y\right)\cdot\mathbf{R}_x\left(d\Phi_x\right)\tag{4.3}$$

У општем случају се инфинитезималне ротације око оса x, y и z могу приказати са

$$\mathbf{R}\left(d\Phi_x,d\Phi_y,d\Phi_z\right)=\begin{bmatrix}1&-d\Phi_z&d\Phi_y\\d\Phi_z&1&-d\Phi_x\\-d\Phi_y&d\Phi_x&1\end{bmatrix}\tag{4.4}$$

Ако су $\mathbf{R}(d\Phi_x,d\Phi_y,d\Phi_z)$ и $\mathbf{R}(d\Omega_x,d\Omega_y,d\Omega_z)$ две матрице инфинитезималних ротација, тада се за две узастопне ротације добија

$$\begin{aligned}&\mathbf{R}(d\Phi_x,d\Phi_y,d\Phi_z)\cdot\mathbf{R}(d\Omega_x,d\Omega_y,d\Omega_z)=\\&=\begin{bmatrix}1&-(d\Phi_z+d\Omega_z)&(d\Phi_y+d\Omega_y)\\(d\Phi_z+d\Omega_z)&1&-(d\Phi_x+d\Omega_x)\\-(d\Phi_y+d\Omega_y)&(d\Phi_x+d\Omega_x)&1\end{bmatrix}=\\&=\mathbf{R}(d\,\Phi_x+d\,\Omega_x,d\,\Phi_y+d\,\Omega_y,\,d\,\Phi_z+d\,\Omega_z)\end{aligned}\tag{4.5}$$

одакле се може закључити да је резултујућа ротација сума компонентних ротација, тј. да важи особина адитивности. На основу тога следи да се инфинитезималне ротације, обзиром да су адитивне и комутативне, могу записивати у векторској форми

$$d\Phi=\begin{bmatrix}d\Phi_x\\d\Phi_y\\d\Phi_z\end{bmatrix}\tag{4.6}$$

што ће касније бити коришћено.

4.1.2 Основне особине кососиметричних матрица

За матрицу $\mathbf{S}$ кажемо да је кососиметрична (антисиметрична) уколико је испуњен услов:

$$\mathbf{S}^T+\mathbf{S}=0\tag{4.7}$$

што се може, узимајући у обзир елемете матрице $\mathbf{S}$, исказати као

$$\mathbf{S}_{ij}+\mathbf{S}_{ji}=0\quad j,i=1,\ldots,n\,.\tag{4.8}$$

У даљој анализи ћемо се ћемо се ограничити на матрице са три врсте и три колоне. Да би (4.8) било испуњено вредности свих дијагоналних чланова морају бити једнаке нули, док сви вандијагонални чланови морају да задовољавају $S_{ij} = -Sji$. Одавде следи да кососиметрична матрица са три врсте и три колоне има само три независна елемента, па се може написати у форми:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -S_3 & S_2 \\ S_3 & 0 & -S_1 \\ -S_2 & S_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Уколико за елементе матрице S_{ij} усвојимо компоненте вектора $\mathbf{a} = [a_x \quad a_y \quad a_z]^T$ тада матрица $\mathbf{S}(\mathbf{a})$ има облик

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \\ \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

што се у случају ортова $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ може написати као

$$\mathbf{S}(\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S}(\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Наведимо сада неколико основних особина кососиметричних матрица које ће нам бити од користи касније. Прва особина је линеарност

$$\mathbf{S}(\alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b}) = \alpha \cdot \mathbf{S}(\mathbf{a}) + \beta \cdot \mathbf{S}(\mathbf{b}) \quad \alpha, \beta - \text{skalari.} \tag{osobina 1}$$

која се може доказати директном провером.

Осим тога, за матрицу $\mathbf{S}(\mathbf{a})$ и вектор $\mathbf{p} = [p_x \quad p_y \quad p_z]^T$ се, исто директном провером, може показати да важи

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{a} \times \mathbf{p}, \tag{osobina 2}$$

тј. да је производ матрице $\mathbf{S}(\mathbf{a})$ и вектора $\mathbf{p}$ једнак векторском производу вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{p}$. Такође се директном провером може показати да за два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и ортогоналну матрицу $\mathbf{R}$ (подсетимо се да су матрице ротације $\mathbf{R}$ ортогоналне тј. да важи: $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$) важи

$$\mathbf{R} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{R} \cdot \mathbf{b}. \tag{osobina 3}$$

Другим речима, ротирани векторски производ два вектора је једнак векторском производу ротираних вектора. Даље, ако на израз

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{b}$$

применимо особину 2, добијамо

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{R} \cdot \left(\mathbf{a} \times \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{b} \right),$$

а ако на овај израз применимо особину 3, следи

$$\mathbf{R}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{b})=(\mathbf{R}\cdot\mathbf{a})\times(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{b})$$

што се, будући да је P ортогонално, може написати у једноставнијој форми

$$(\mathbf{R}\cdot\mathbf{a})\times(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{b})=(\mathbf{R}\cdot\mathbf{a})\times\mathbf{b}.$$

И на крају, поновном применом особине 2, добијамо

$$(\mathbf{R}\cdot\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{S}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}.$$

Према томе, закључујемо

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{S}(\mathbf{a})\cdot\mathbf{R}^T\cdot(\mathbf{b})=\mathbf{S}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{a})\cdot\mathbf{b},$$

а овим смо доказали да важи

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{S}(\mathbf{a})\cdot\mathbf{R}^T=\mathbf{S}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}). \qquad \text{(osobina 4)}$$

Даље, претпоставимо да је матрица ротације функција само једне променљиве θ. С обзиром да је $\mathbf{R}$ ортогонално, следи

$$\mathbf{R}(\theta)\cdot\mathbf{R}^T(\theta)=\mathbf{I}.$$

Ако диференцирамо обе стране по θ добија се

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\cdot\mathbf{R}^T(\theta)+\mathbf{R}(\theta)\cdot\frac{d\mathbf{R}^T}{d\theta}=0 \tag{4.10}$$

Дефинишимо матрицу $\mathbf{S}$ као

$$\mathbf{S}\overset{\text{def}}{=}\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\cdot\mathbf{R}^T(\theta) \tag{4.11}$$

чијим транспоновањем добијамо

$$\mathbf{S}^T=\left(\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\cdot\mathbf{R}^T(\theta)\right)^T=\mathbf{R}(\theta)\cdot\frac{d\mathbf{R}^T}{d\theta}. \tag{4.12}$$

Упоређивањем израза (4.11) и (4.12) са (4.10) видимо да за $\mathbf{S}$ дефинисано као у (4.11) важи

$$\mathbf{S}+\mathbf{S}^T=0,$$

па можемо да закључимо да ако је матрица $\mathbf{S}$ дефинисана као у (4.11) онда је она кососиметрична. Помножимо ли обе стране (4.11) са $\mathbf{R}$ следи

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}=\mathbf{S}\cdot\mathbf{R}(\theta). \tag{4.13}$$

Овај израз нам каже да диференцијал матрице ротације по углу θ можемо срачунати тако да матрицу ротације $\mathbf{R}$ помножимо кососиметричном матрицом $\mathbf{S}$.

Пример 4.1.

Ако је матрица ротације око x осе за угао θ дата са

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

(видети израз (3.14)) израчунати матрицу $\mathbf{S}$ према (4.11).

Диференцирањем и транспоновањем матрице $\mathbf{R}_{\mathbf{x},\theta}$ и уврштавањем у (4.11) следи:

$$\mathbf{S} = \frac{d\mathbf{R}}{d\theta} \cdot \mathbf{R}^T(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S\theta & -C\theta \\ 0 & C\theta & -S\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & S\theta \\ 0 & -S\theta & C\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}(\mathbf{i}).$$

Према томе, показали смо да је

$$\frac{d\mathbf{R}_{x,\theta}}{d\theta} = \mathbf{S}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{R}_{x,\theta}.$$

На исти начин можемо показати да важи

$$\frac{d\mathbf{R}_{y,\theta}}{d\theta} = \mathbf{S}(\mathbf{j}) \cdot \mathbf{R}_{y,\theta}, \frac{d\mathbf{R}_{z,\theta}}{d\theta} = \mathbf{S}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}_{z,\theta}.$$

Као коначно уопштење, уколико посматрамо случај ротације око произвољен осе $\boldsymbol{u}$ за угао θ, потпуно истим поступком, уз помоћ једначине (3.28) добијамо:

$$\frac{d\mathbf{R}_{\mathbf{u},\theta}}{d\theta} = \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{u},\theta}.$$

4.1.3 Угаоне брзине и убрзања

Претпоставимо сада да матрица $\mathbf{R}$ није константна већ да је функција времена. На основу (4.13) можемо писати

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{R}(t)$$

где је $\mathbf{S}(t)$ кососиметрична матрица. За вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$, који представља угаону брзину ротирајућег координатног система у односу на фиксни, кососиметрична матрица $\mathbf{S}$ постаје $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}))$. Ово можемо једноставно показати на следећем примеру.

Ако је $\mathbf{R}(t)$ представља ротацију око осе $\mathbf{u}$ за угао θ тада се њен извод, уз претпоставку да се оса ротације не мења, може срачунати према

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{d\mathbf{R}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{R}(t) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t)) \cdot \mathbf{R}(t) \tag{4.14}$$

где је $\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{u} \cdot \dot{\theta}$ угаона брзина.

Претпоставимо да је вектор $\mathbf{p_1}$ непокретан у односу на координатни систем $O_1 - x_1y_1z_1$ који ротира у односу на координатни систем $O_0 - x_0y_0z_0$ око фиксне осе. Тада су координате вектора $\mathbf{p}$ у односу на $O_0 - x_0y_0z_0$ дате са

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1(t) \cdot \mathbf{p}_1$$

одакле, после диференцирања, и применом особине 2 следи

$$\dot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\mathbf{R}}_0^1(t) \cdot \mathbf{p}_1 = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{R}_0^1(t) \cdot \mathbf{p}_1 = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{p}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_0$$

што претставља познат израз за брзину изражену преко векторског производа.

На сличан начин ћемо размотрити случај када је релативно кретање између координатних система $O_0 - x_0y_0z_0$ и $O_1 - x_1y_1z_1$ усложњено, па поред ротације постоји и транслација. Ако израз

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1 \quad / \frac{d}{dt},$$

диференцирамо, имајући у виду да је $\mathbf{p}_1$ константан, следи

$$\dot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\mathbf{R}}_0^1(t) \cdot \mathbf{p}_1 + \dot{\mathbf{d}}_0^1 = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{R}_0^1(t) \cdot \mathbf{p}_1 + \dot{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v} \tag{4.15}$$

где $\mathbf{r}$ представља вектор $\mathbf{p}_1$ изражен у односу на непокретни координатни сустем $O_0 - x_0y_0z_0$, односно $\mathbf{r} = \mathbf{R}_0^1\mathbf{p_1}$, а $\mathbf{v}$ је брзина кретања координатног почетка O_1 у односу на координатни систем O_0, односно $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{d}}_0^1$.

Да бисмо извели израз за релативна убрзања између два координатна система подсетимо се израза за диференцирање векторског производа

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

Напишимо поново израз (4.15) у форми

$$\dot{\mathbf{p}}_0 - \dot{\mathbf{d}}_0^1 = \dot{\mathbf{R}}_0^1 \cdot \mathbf{p}_1 = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{p}_1)$$

па га диференцирајмо по времену

$$\ddot{\mathbf{p}}_0 - \ddot{\mathbf{d}}_0^1 = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{R}}_0^1 \cdot \mathbf{p}_1) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \tag{4.16}$$

Израз (4.16) можемо да напишемо и у форми

$$\ddot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{a} \tag{4.17}$$

где је $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{d}}_0^1$ линеарно убрзање, док израз $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ представља центрипетално убрзање које је увек уперено према оси обртања и управно је на њу док члан $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$ представља тангенцијално убрзање. Уколико избацимо све смене добија се:

$$\ddot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{R}_0^1\mathbf{p}_1) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_0^1\mathbf{p}_1)) + \ddot{\mathbf{d}}_0^1 \tag{4.18}$$

Уколико $\mathbf{p}_1$ мења свој положај у односу на координатни систем O_1 његова брзина $\dot{\mathbf{p}}_1$ и убрзање $\ddot{\mathbf{p}}_1$ су различите од нуле и не могу се занемарити приликом

диференцијације па израз (4.18) постаје

$$\ddot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \left(\mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}_1\right) + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}_1\right)\right) + \ddot{\mathbf{d}}_0^1 + 2 \cdot \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{R}_0^1 \cdot \dot{\mathbf{p}}_1\right) + \mathbf{R}_0^1 \cdot \ddot{\mathbf{p}}_1. \tag{4.19}$$

Примећује се да су се у једначини појавила два нова члана, где први $2 \cdot \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{R}_0^1 \cdot \dot{\mathbf{p}}_1\right)$ представља Кориолисово убрзање, док други $\left(\mathbf{R}_0^1 \cdot \ddot{\mathbf{p}}_1\right.$ представља локално убрзање тачке $\mathbf{p}_1$ изражено у односу на координатни систем O_0.

4.1.4 Сабирање угаоних брзина

У овом одељку ћемо извести изразе за сабирање угаоних брзина уколико се два координатна система O_1 и O_2 крећу у односу на непокретни координатни систем O_0. Изразимо вектор положаја тачке П у односу на координатне системе O_0, O_1 и O_2

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1 \tag{4.20}$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_1^2 \cdot \mathbf{p}_2 + \mathbf{d}_1^2 \tag{4.21}$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^2 \cdot \mathbf{p}_2 + \mathbf{d}_0^2 \tag{4.22}$$

где, према (3.65) и (3.66) и даље важи

$$\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{R}_1^2 \tag{4.23}$$

$$\mathbf{d}_0^2 = \mathbf{d}_0^1 + \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{d}_1^2 \tag{4.24}$$

С обзиром да су матрице ротације функције времена диференцирањем (4.23) добијамо

$$\dot{\mathbf{R}}_0^2 = \dot{\mathbf{R}}_0^1 \cdot \mathbf{R}_1^2 + \mathbf{R}_0^1 \cdot \dot{\mathbf{R}}_1^2. \tag{4.25}$$

Израз са леве стране (4.25), тј. $(\dot{\mathbf{R}}_0^2)$, можемо написати као

$$\dot{\mathbf{R}}_0^2 = \mathbf{S}\left(\boldsymbol{\omega}_0^2\right) \cdot \mathbf{R}_0^2 \tag{4.26}$$

па први део израза са десне стране једнакости у (4.25), тј. $\dot{\mathbf{R}}_0^1 \cdot \mathbf{R}_1^2$, можемо написати као

$$\dot{\mathbf{R}}_0^1 \cdot \mathbf{R}_1^2 = \mathbf{S}\left(\boldsymbol{\omega}_0^1\right) \cdot \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{R}_1^2 = \mathbf{S}\left(\boldsymbol{\omega}_0^1\right) \cdot \mathbf{R}_0^2, \tag{4.27}$$

док други израз са десне стране једнакости у (4.25), тј. $\mathbf{R}_0^1 \cdot \dot{\mathbf{R}}_1^2$, можемо трансформисати на следећи начин

$$\mathbf{R}_0^1 \cdot \dot{\mathbf{R}}_1^2 = \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{S}\left(\boldsymbol{\omega}_1^2\right) \cdot \mathbf{R}_1^2. \tag{4.28}$$

Ако помножимо горњи израз са $\mathbf{R}_0^{1T}$

$$\dot{\mathbf{R}}_1^2 = \mathbf{S}\left(\boldsymbol{\omega}_1^2\right) \cdot \mathbf{R}_0^{1T} \cdot \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{R}_1^2 \tag{4.29}$$

и применимо правило 4, добијамо

$$\mathbf{R}_0^1 \cdot \dot{\mathbf{R}}_1^2 = \mathbf{S}\left(\mathbf{R}_0^1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1^2\right) \cdot \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{R}_1^2 = \mathbf{S}\left(\mathbf{R}_0^1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1^2\right) \cdot \mathbf{R}_0^2. \tag{4.30}$$

Уношењем (4.26), (4.27) и (4.30) у (4.25), следи

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^2)\cdot\mathbf{R}_0^2=\left\{\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^1)+\mathbf{S}(\mathbf{R}_0^1\cdot\boldsymbol{\omega}_1^2)\right\}\cdot\mathbf{R}_0^2 \tag{4.31}$$

С обзиром да је $\mathbf{S}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{S}(\mathbf{a})+\mathbf{S}(\mathbf{b})$ следи

$$\boldsymbol{\omega}_0^2=\boldsymbol{\omega}_0^1+\mathbf{R}_0^1\cdot\boldsymbol{\omega}_1^2 \tag{4.32}$$

Одавде закључујемо да се угаоне брзине могу сабирати само под условом да су изражене у истом координатном систему.

4.1.5 Веза између извода кватерниона и угаоне брзине

Претпоставимо да је оријентација неког предмета промењива у времену и да је задата кватернионом $\mathbf{q}(t)$. Први извод кватерниона ћемо израчунати према дефиницији извода:

$$\dot{\mathbf{q}}=\lim_{dt\to 0}\frac{\mathbf{q}(t+dt)-\mathbf{q}(t)}{dt}. \tag{4.33}$$

Нека се у периоду од dt координатни систем заротира за додатних $d\theta$ око осе $\mathbf{u}$ која је задата у односу на фиксни координатни систем. У том случају, можемо написати:

$$\mathbf{q}(t+dt)=\mathbf{q}_{d\theta,\mathbf{u}}\mathbf{q}(t) \tag{4.34}$$

Даљим развијањем претходног израза уз једначине (3.46) и (3.47) и имајући у виду да за мали угао $d\theta$ важи $\sin d\theta\approx\theta$ и $\cos d\theta\approx 1$ добија се следеће:

$$\mathbf{q}(t+dt)=\begin{pmatrix}\cos\frac{d\theta}{2}\\ u_x\sin\frac{d\theta}{2}\\ u_y\sin\frac{d\theta}{2}\\ u_z\sin\frac{d\theta}{2}\end{pmatrix}\mathbf{q}(t)=\begin{pmatrix}1\\ u_x\frac{d\theta}{2}\\ u_y\frac{d\theta}{2}\\ u_z\frac{d\theta}{2}\end{pmatrix}\mathbf{q}(t) \tag{4.35}$$

Уврштавањем овог израза у (4.33), и знајући да је неутрални елемент за множење кватерниона $\mathbf{0}_q$ (3.51), добија се веза између кватерниона и угаоне брзине:

$$\dot{\mathbf{q}}=\lim_{dt\to 0}\frac{\mathbf{q}(t+dt)-\mathbf{q}(t)}{dt}=\lim_{dt\to 0}\frac{\begin{pmatrix}1\\ u_x\frac{d\theta}{2}\\ u_y\frac{d\theta}{2}\\ u_z\frac{d\theta}{2}\end{pmatrix}\mathbf{q}(t)-\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\mathbf{q}(t)}{dt}=\lim_{dt\to 0}\frac{\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}d\theta\mathbf{u}\end{pmatrix}\mathbf{q}(t)}{dt} \tag{4.36}$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{\omega}\end{pmatrix}\mathbf{q}(t) \tag{4.37}$$

Овиме је добијена веза између извода кватерниона и угаоне брзине. Важно

је опет напоменути да је угаона брзина у овој једначини задата у односу на непокретни координатни систем.

Врло често се у роботици среће употреба жироскопа за одређивање оријентације предмета, тако што се врши интеграција угаоне брзине. Како би се повећала тачност, ова информација се стапа са мерењима са акцелерометра и магнетометра. У случају жироскопа, мерена угаона брзина је изражена у покретном координатном систему сензора $\mathbf{w}$.

Знајући формулу за трансформацију вектора помоћу кватерниона (3.55), врло једноставно се добија веза између извода кватерниона $\dot{\mathbf{q}}(t)$ и угаоне брзине брзине изражене у покретном координатном систему:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{\omega}\end{pmatrix}\mathbf{q}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{q}(t)\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{w}\end{pmatrix}\bar{\mathbf{q}}(t)\,\mathbf{q}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{q}(t)\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{w}\end{pmatrix} \tag{4.38}$$

4.2 ЈАКОБИЈАН

Кретање хватаљке по одређеној трајекторији захтева координисано кретање свих зглобова механичке структуре робота па је потребно да се успостави веза између кретања зглобова механичке конфигурације и кретања хватаљке. Укупно кретање хватаљци придруженог координатног система (које је идентично кретању хватаљке) можемо да разложимо на његово угаоно кретање и линеарно кретање његовог координатног почетка O_H.

Другим речима, треба наћи везу између линеарне и угаоне брзине хватаљке ($\dot{\mathbf{p}}$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}$) и брзина покретања зглобова $\dot{\mathbf{q}}$, што се може написати као

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}_L\dot{\mathbf{q}} \tag{4.39}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_U\dot{\mathbf{q}} \tag{4.40}$$

при чему $\mathbf{J}_L$ повезује брзине кретања зглобова са линеарном брзином хватаљке (нпр. тачке O_H на сл. 3.22) док $\mathbf{J}_U$ повезује брзине кретања зглобова са угаоном брзином хватаљке. Ове две једначине можемо објединити у јединствен израз чиме се добија релација

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{v} = \begin{bmatrix}\dot{\mathbf{p}}\\ \boldsymbol{\omega}\end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \tag{4.41}$$

где је $\dot{\mathbf{s}}$ укупни вектор брзине хватаљке изражен у спољашњим координатама (обједињени су вектори линеарне и угаоне брзине хватаљке), а $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n]^T$ је вектор брзина у зглобовима механизма. Матрица $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ којом се повезује кретање у зглобовима механизма са кретањем хватаљке се назива јакобијевом матрицом или јакобијаном. Према томе, јакобијева матрица повезује брзине кретања зглобова роботског механизма са линеарном и угаоном брзином кретања хватаљке изражене у спољашњим (декартовим правоуглим) координатама. Овде треба напоменути да се овај тип јакобијана, који представља везу између спољашњих и унутрашњих брзина, назива *геометријски* Јакобијана.

4.2.1 Срачунавање геометријског јакобијана

У овом одељку ће бити приказан начин срачунавања елемената геометријског Јакобијана. Као што смо већ уочили, кретање у зглобовима механизма доприноси и линеарном и угаоном кретању хватаљке. Ако напишемо јакобијеву матрицу у облику

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{L1} & \mathbf{J}_{L2} & \cdots & \mathbf{J}_{Ln} \\ \mathbf{J}_{U1} & \mathbf{J}_{U2} & \cdots & \mathbf{J}_{Un} \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

тако да сваки елеменат $\mathbf{J_{Li}}$ и $\mathbf{J_{Ui}}$ представља и-ту вектор колону димензије (3x1) лако се може уочити да први део колоне ($\mathbf{J_{Li}}$) одговара доприносу i-тог зглоба линеарном, а други део ($\mathbf{J_{Ui}}$) угаоном кретању хватаљке. У развијеној форми (4.42) постаје

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_H \\ \boldsymbol{\omega}_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} {J_{L1}}^1 \\ {J_{L1}}^2 \\ {J_{L1}}^3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} {J_{L2}}^1 \\ {J_{L2}}^2 \\ {J_{L2}}^3 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} {J_{Ln}}^1 \\ {J_{Ln}}^2 \\ {J_{Ln}}^3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} {J_{U1}}^1 \\ {J_{U1}}^2 \\ {J_{U1}}^3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} {J_{U2}}^1 \\ {J_{U2}}^2 \\ {J_{U2}}^3 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} {J_{Un}}^1 \\ {J_{Un}}^2 \\ {J_{Un}}^3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}. \tag{4.43}$$

Одавде се линеарна брзина врха робота може изразити на следећи начин

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{J_{L1}} \cdot \dot{q}_1 + \mathbf{J_{L2}} \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \mathbf{J_{Ln}} \cdot \dot{q}_n, \tag{4.44}$$

а на исти начин и угаона брзина хватаљке

$$\boldsymbol{\omega}_H = \mathbf{J_{U1}} \cdot \dot{q}_1 + \mathbf{J_{U2}} \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \mathbf{J_{Un}} \cdot \dot{q}_n. \tag{4.45}$$

Размотримо на који начин можемо да одредимо елементе матрице $\mathbf{J_{Li}}$ и $\mathbf{J_{Ui}}$. На сл. 4.1а. је приказан i-ти (ротациони) зглоб робота и његов положај у односу на хватаљку, док је на сл. 4.1б. i-ти зглоб робота транслаторан. Са $\mathbf{z}_{i-1}$ обележимо осу посматраног зглоба (у првом случају ротационог а у другом транслаторног).

Размотримо најпре како кретање неког од зглобова механизма може да допринесе промени линеарне брзине хватаљке. Замислимо да су сви зглобови фиксирани осим i-тог. У случају да је **i-ти зглоб транслаторан** његово померање изазива само транслаторно померање хватаљке у правцу $\mathbf{z}_{i-1}$ осе, брзином (припадајућа z оса је $\mathbf{z}_{i-1}$, а ДХ параметар d_i је променљива вредност координате зглоба), тј.

$$\mathbf{J}_{Li} \cdot \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{z}_{i-1} \cdot \dot{d}_i \tag{4.46}$$

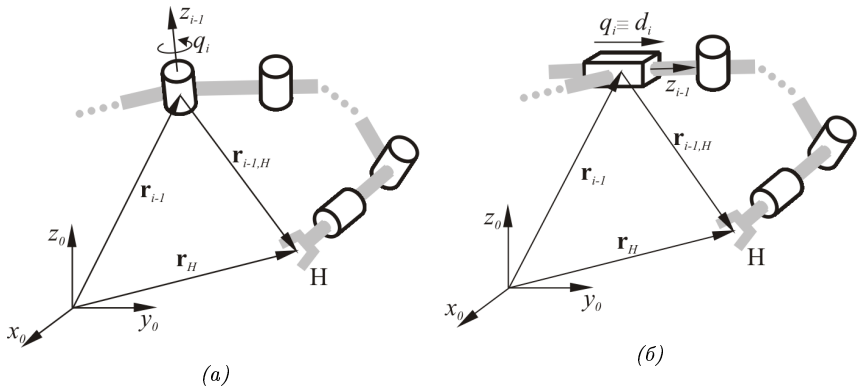
Ако је **i-ти зглоб ротациони** његовим покретањем ће део механизма који се налази даље од зглоба који се покреће (укључујући и хватаљку) добити додатну компоненту

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{z}_{i-1} \cdot \dot{q}_i \tag{4.47}$$

угаоне брзине која ће линеарну брзину хватаљке робота, која је од осе обртања удаљена за $\mathbf{r}_{i-1,H}$, променити за

$$\mathbf{J}_{Li} \cdot \dot{\mathbf{q}}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,H} = \left(\mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,H}\right) \cdot \dot{q}_i \tag{4.48}$$

На сличан начин ћемо одредити како кретања у транслаторном и ротационом зглобу доприносе промени угаоне брзине хватаљке.



Слика 4.1: Допринос кретању хватаљке због померања а) ротационог и б) линеарног (транслаторног) зглоба

Ако је ***i*-ти зглоб транслаторни** он не доприноси промени угаоне брзине хватаљке, па је

$$\mathbf{J}_{Ui} \cdot \dot{q}_i = \mathbf{0}. \tag{4.49}$$

Ако је ***i*-ти зглоб ротациони**, додатна компонента угаоне брзине која се генерише кретањем зглоба, је дата са

$$\mathbf{J}_{Ui} \cdot \dot{q}_i = \mathbf{z}_{i-1} \cdot \dot{q}_i. \tag{4.50}$$

Према томе, једначинама (4.46, 4.48-4.50) је могуће одредити елементе Јакобијана $\mathbf{J_{Li}}$ и $\mathbf{J_{Ui}}$ за случај транслаторних и ротационих зглобова. На основу тога, можемо резимирати:

- за транслаторни зглоб важи

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Li} \\ \mathbf{J}_{Ui} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{4.51}$$

- за ротациони зглоб важи

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Li} \\ \mathbf{J}_{Ui} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,H} \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix}. \tag{4.52}$$

При срачунавању јакобијана једине величине које треба одредити су вектори $\mathbf{z}_{i-1}$ и $\mathbf{r}_{i-1,H}$ који су функције само помераја у зглобовима робота. Вектор $\mathbf{z}_{i-1}$ представља трећу колону у матрици ротације $\mathbf{R}_0^{i-1}$ (види (3.7)) и

могуће га је веома једноставно одредити на следећи начин

$$\mathbf{z}_{i-1} = \mathbf{R}_0^1(q_1)\mathbf{R}_1^2(q_2)\ldots\mathbf{R}_{i-2}^{i-1}(q_{i-1})\mathbf{z} \tag{4.53}$$

где је $\mathbf{z} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$, одакле следи претходно наведена тврдња да $\boldsymbol{z}_{i-1}$ одговара трећој колони матрице $\mathbf{R}_0^{i-1}$.

Вектор положаја од $i-1$-вог зглоба до хватаљке $\mathbf{r}_{i-1,H}$ (сл. 4.1а и б) је могуће одредити као разлику вектора $\mathbf{r}_H$ од координатног почетка до хватаљке и вектора $\mathbf{r}_{0,i-1}$ од координатног почетка до $i-1$-вог зглоба. Вектор $\mathbf{r}_H$ је могуће одредити као прва три елемента четврте колоне матрице укупне хомогене трансформације $\mathbf{H}_0^H$ која је дата са

$$\mathbf{H}_0^H = \mathbf{H}_0^1(q_1)\mathbf{H}_1^2(q_2)\cdots\mathbf{H}_{n-i}^H(q_n)$$

па следи

$$\mathbf{r}_H = \mathbf{H}_0^H\mathbf{r}_0, \tag{4.54}$$

где је $\mathbf{r}_0$ дато са $\mathbf{r}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$. Сличним поступком је могуће одредити и вектор $\mathbf{r}_{0,i-1}$. Наиме,

$$\mathbf{r}_{0,i-1} = \mathbf{H}_0^1(q_1)\mathbf{H}_1^2(q_2)...\mathbf{H}_{i-2}^{i-1}(q_{i-1})\mathbf{r}_0 \tag{4.55}$$

и коначно добијамо:

$$\mathbf{r}_{i-1,H} = \mathbf{r}_H - \mathbf{r}_{0,i-1}.$$

Према томе, изрази (4.53-4.55) омогућавају једноставно срачунавање нумери–чких вредности елемената Јакобијана под условом да су познате матрице хомогених трансформација које одговарају тренутним вредностима координата у зглобовима.

Пример 4.2.

Одредити геометријски Јакобијан за тросегментну антропоморфну конфигурацију (сл. 3.19) и координатне системе постављене као у примеру 3.3. Вредности углова у зглобовима су дате са $q_1 = 45°$, $q_2 = 30°$ и $q_3 = 60°$, а дужине сегмената су $a_2 = 0,5m$ и $a_3 = 0,5m$.

Одредимо најпре пројекције оса зглобова на базни координатни систем:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix}S1\\-C1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix}S1\\-C1\\0\end{bmatrix}.$$

Пошто механичка конфигурација има само 3 степена слободе могуће је остварити само тражену позицију врха минималне конфигурације док на оријентацију хватаљке не можемо истовремено утицати. С обзиром да су сва три зглоба ротациона Јакобијан има облик

$$\mathbf{J} = \left[\mathbf{z}_0 \times (\overrightarrow{O_0O_3}) \quad \mathbf{z}_1 \times (\overrightarrow{O_1O_3}) \quad \mathbf{z}_2 \times (\overrightarrow{O_2O_3})\right].$$

Вектори положаја координатниг почетака су дати са

$$\mathbf{O}_0 = \mathbf{O}_1 = [0 \quad 0 \quad 0]^T, \mathbf{O}_2 = \begin{bmatrix} a_2C1C2 \\ a_2S1C2 \\ a_2S2 \end{bmatrix}, \mathbf{O}_3 = \begin{bmatrix} a_2C1C2 + a_3C1C23 \\ a_2S1C2 + a_3S1C23 \\ a_2S2 + a_3S23 \end{bmatrix}.$$

Сада можемо да одредимо елементе Јакобијана

$$\mathbf{z}_0 \times (\overrightarrow{O_0O_3}) = \begin{bmatrix} -S1(a_2C2 + a_3C23) \\ C1(a_2C2 + a_3C23) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_1 \times (\overrightarrow{O_1O_3}) = \begin{bmatrix} -C1(a_2S2 + a_3S23) \\ -S1(a_2S2 + a_3S23) \\ a_2C2 + a_3C23 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_2 \times (\overrightarrow{O_2O_3}) = \begin{bmatrix} -a_3C1S23 \\ -a_3S1S23 \\ a_3C23 \end{bmatrix},$$

одакле коначно ($q_1 = 45°$, $q_2 = 30°$, $q_3 = 60°$, $a_2 = 0,5m$ и $a_3 = 0,5m$) следи

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -0.3062 & -0.1768 & -0.3536 \\ 0.3062 & -0.5303 & 0.3536 \\ 0 & 0.4330 & 0 \end{bmatrix}.$$

Уколико у израз за $\mathbf{J}$ уврстимо развијене изразе за векторске производе ($\mathbf{z}_0 \times (\overrightarrow{O_0O_3})$, $\mathbf{z}_1 \times (\overrightarrow{O_1O_3})$ и $\mathbf{z}_2 \times (\overrightarrow{O_2O_3})$) добићемо исти резултат добијен аналитичким начином

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -S1\,(a_2C2 + a_3C23) & -C1\,(a_2S2 + a_3S23) & -a_3C1S23 \\ C1\,(a_2C2 + a_3C23) & -S1\,(a_2S2 + a_3S23) & -a_3S1S23 \\ 0 & a_2C2 + a_3C23 & a_3C23 \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

Треба приметити да су елементи матрице $\mathbf{J}$ функције углова у зглобовима и да се, са променом положаја механичке конфигурације робота, мењају. Према томе, током реализације одређеног покрета **матрица J није константна** и вредности њених елемената треба срачунавати за сваки нови положај механичке конфигурације.

4.2.2 Срачунавање аналитичког јакобијана

Насупрот геометријском Јакобијану, постоји и *аналитички* Јакобијан, који представља матрицу парцијалних извода функције којом се дефинише позиција и минимална репрезентације оријентација врха робота у спољашњим координатама по унутрашњим угловима у зглобовима механизма робота. Да би боље разумели природу аналитичког Јакобијана $\mathbf{J}_A$ написаћемо га у

развијеној форми:

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial x}{\partial q_4} & \frac{\partial x}{\partial q_5} & \frac{\partial x}{\partial q_6} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_4} & \frac{\partial y}{\partial q_5} & \frac{\partial y}{\partial q_6} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_4} & \frac{\partial z}{\partial q_5} & \frac{\partial z}{\partial q_6} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} & \frac{\partial \varphi}{\partial q_4} & \frac{\partial \varphi}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi}{\partial q_6} \\ \frac{\partial \theta}{\partial q_1} & \frac{\partial \theta}{\partial q_2} & \frac{\partial \theta}{\partial q_3} & \frac{\partial \theta}{\partial q_4} & \frac{\partial \theta}{\partial q_5} & \frac{\partial \theta}{\partial q_6} \\ \frac{\partial \psi}{\partial q_1} & \frac{\partial \psi}{\partial q_2} & \frac{\partial \psi}{\partial q_3} & \frac{\partial \psi}{\partial q_4} & \frac{\partial \psi}{\partial q_5} & \frac{\partial \psi}{\partial q_6} \end{bmatrix}. \tag{4.57}$$

Овде је оријентација задата помоћу три угла φ, θ и ψ, где њихово значење зависи од репрезентације које смо одабрали, односно да ли користимо ZYZ, ZYX или неке друге Ојлерове углове.

Слично изразу (4.41) помоћу Јакобијана можемо израчунати везу између брзина у зглобовима и извода позиције и оријентације у времену:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_A \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}. \tag{4.58}$$

Најјасније ћемо поступак одређивања Јакобијана аналитичким путем показати на примеру.

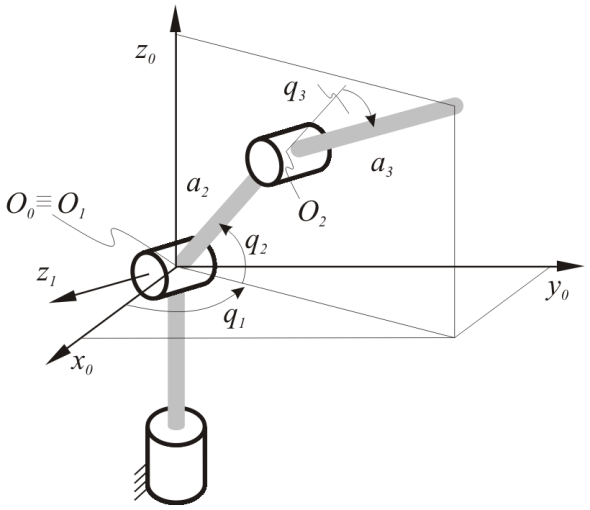
Пример 4.3.

За тросегментни антропоморфни механизам (минималну конфигурацију) чија је кинематска схема приказана на сл. 4.2. аналитичким начином одредити Јакобијан.

При решавању овог задатка прво треба написати једначине које повезују позицију врха робота са вредностима углова у зглобовима. За конфигурацију приказану на сл. 4.2. те једначине су:

$$\begin{aligned} x &= a_2 C1C2 + a_3 C1C23 \\ y &= a_2 S1C2 + a_3 S1C23 \\ z &= a_2 S2 + a_3 S23 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Затим је потребно успоставити везу између малих (инфинитезималних) помераја у зглобовима и резултујућих помераја хватаљке. Да бисмо ту везу успоставили треба диференцирати изразе (4.59) по угловима у зглобовима,



Слика 4.2: Кинематска схема тросегментног антропоморфног механизма

после чега се добија

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} dq_3 \\ dy &= \frac{\partial y(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} dq_3 \\ dz &= \frac{\partial z(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} dq_3 \end{aligned} \tag{4.60}$$

што се у векторској форми може написати као

$$d\mathbf{s} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \tag{4.61}$$

где је

$$d\mathbf{s} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}, \; d\mathbf{q} = \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix}, \; \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{J}$ је, дакле, матрица парцијалних извода функција $x(q_1, q_2, q_3)$, $y(q_1, q_2, q_3)$ и $z(q_1, q_2, q_3)$ по угловима у зглобовима q_1, q_2 и q_3. Према томе, вредности елемената матрице $\mathbf{J}$ се могу добити диференцирањем горњих израза.

За пример тросегментне минималне конфигурације антропоморфног механизма са сл. 4.2. матрица $\mathbf{J}$ се добија у коначној форми

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -S1\,(a_2 C2 + a_3 C23) & -C1\,(a_2 S2 + a_3 S23) & -a_3 C1 S23 \\ C1\,(a_2 C2 + a_3 C23) & -S1\,(a_2 S2 + a_3 S23) & -a_3 S1 S23 \\ 0 & a_2 C2 + a_3 C23 & a_3 C23 \end{bmatrix} \tag{4.62}$$

Лако се примети да је овај резултат идентичан резултату из претходног примера (4.56). Одакле се изовид закључак да је линеарни део аналитичког Јакобијана идентичан линеарном делу геометријског Јакобијана. Таква једнакост не посотоји између ротационих делова Јакобијана. И везом између аналитичког и геометријског Јакобијана ћемо се позабавити у наредном одељку.

4.2.3 Веза између аналитичког и геометријског јакобијана

Иако можда делује да су геометријски и аналитички Јакобијан еквивалентни и да је разлика само у поступку рачунања, ипак постоји врло суптилна разлика између њих. Постоји врло суптилна разлика између геометријског и аналитичког јакобијана. Што се тиче извода позиције по времену за аналитички јакобијан, она је иста као и линеарна брзина, односно:

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \tag{4.63}$$

Ово показује да је део Јакобијана везан за линеарно кретање (прве три врсте), потпуно еквивалентан за аналитички и геометријски Јакобијан. Као што је већ речено, до истог закључка се може доћи поређењем једначина (4.56) и (4.62), које представљају део везан за линеарно кретање геометријског и аналитичког Јакобијана за робот антропоморфне конфигурације.

Међутим ово не важи и за део Јакобијана везан за ротационо кретање, односно:

$$\boldsymbol{\omega} \neq \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \tag{4.64}$$

без обзира на репрезентацију орјентације коју смо одабрали.

Претпоставимо да је орјентација задата преко ZYZ Ојлерових углова. У том случају, ротација се врши око фиксне z за угао φ, затим осе y' новонасталог координатног система за угао θ, и коначно око осе z'' финалног координатног система за угао ψ. На основу тога можемо одредити везу између угаоне брзине и извода Ојлерових углова:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{z,\varphi} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{z,\varphi}\mathbf{R}_{y,\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi & \cos\varphi\sin\theta \\ 1 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{B}(\varphi,\theta,\psi) \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \end{aligned}. \tag{4.65}$$

Када смо нашли везу између угаоне брзине и извода Ојлерових зглобова можемо писати следеће:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix}\dot{\mathbf{p}}\\ \boldsymbol{\omega}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot{\mathbf{p}}\\ \mathbf{B}(\varphi,\theta,\psi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{B}(\varphi,\theta,\psi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\\ \dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} = \tag{4.66}$$

$$= \begin{bmatrix}\mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{B}(\varphi,\theta,\psi)\end{bmatrix}\mathbf{J}_A\dot{\mathbf{q}}$$

Како овај израз важи за све векторе угаоних брзина $\dot{\mathbf{q}}$, можемо га одстранити из једначине, и коначно добијамо везу између аналитичког и геометријског јакобијана:

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{B}(\varphi,\theta,\psi)^{-1}\end{bmatrix}\mathbf{J} \tag{4.67}$$

Из израза се уочава да је матрица $\mathbf{B}$ сингуларна уколико је $\sin\theta = 0$. У том случају, Јакобијан не може имати пун ранг. Сингуларитети матрице $\mathbf{B}$ се називају репрезентациони сингуларитети. Овде се може уочити да сингуларитети аналитичког јакобијана садрже сингуларитете репрезентације као и сингуларитете геометријског Јакобијана.

4.2.4 Јакобијан када је ротација изражена кватернионима

Као што смо видели у претходном одељку аналитички Јакобијан зависи од репрезентације оријентације коју користимо. Уколико је оријентација представљена помоћу кватерниона онда, позицију и оријентацију у простору представљамо помоћу 7 димензионалног вектора, где прве три координате представљају позицију у простору, док последње четири представљају оријентацију изражену у кватернионима. Самим тиме Јакобијан ће имати димензију 7 пута 6. Како би диференцирали ознаке, ${}^{u}\mathbf{q} = (q_w, q_x, q_y, q_z)$ ће представљати јединични кватерниона, док ће једноставно $\mathbf{q}$ представљати унутрашње координате.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\\ \dot{q}_w\\ \dot{q}_x\\ \dot{q}_y\\ \dot{q}_z\end{bmatrix} = \mathbf{J}_Q\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\\ \dot{q}_4\\ \dot{q}_5\\ \dot{q}_6\end{bmatrix}. \tag{4.68}$$

Исто као и у претходном случају Јакобијан ћемо одредити коришћењем геометријског јакобијана и везе између извода кватерниона и угаоне брзине (4.37). На основу претходно наведене једначине коришћењем дефиниције

множења кватерниона (3.50) можемо писати:

$$ {}^{u}\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{\omega}\end{pmatrix}{}^{u}\mathbf{q}\,(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\omega_x q_x - \omega_y q_y - \omega_z q_z\\ \omega_x q_w + \omega_y q_z - \omega_z q_y\\ -\omega_x q_z + \omega_y q_w + \omega_z q_x\\ \omega_x q_y + \omega_y q_x - \omega_z q_w\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-q_x & -q_y & -q_z\\ q_w & q_z & -q_y\\ -q_z & q_w & q_x\\ q_y & -q_x & q_w\end{bmatrix}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{H}({}^{u}\mathbf{q})\boldsymbol{\omega}. \tag{4.69} $$

Имајући ово у виду лако се можемо написати Јакобијан уколико је ротација изражена у кватернионима:

$$ \mathbf{J}_Q = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3}\\ \mathbf{0}_{4\times 3} & \mathbf{H}({}^{u}\mathbf{q})\end{bmatrix}\mathbf{J}. \tag{4.70} $$

4.3 НУМЕРИЧКО РЕШАВАЊЕ ИНВЕРЗНОГ КИНЕМАТСКОГ ПРОБЛЕМА

Јакобијева матрица коју смо одредили у претходном одељку представља основу за нумеричко решавање инверзног кинематског проблема[1]. Поступак решавања је потпуно општи и не зависи од типа робота, али за разлику од аналитичког решења, овде се добија само једно решење које одговара задатом вектору спољашњих координата $\mathbf{c}$ и то оно које је најближе задатом решењу $\mathbf{q}^{POC}$ од којег је процедура започета. Наиме, из израза

$$ \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \tag{4.71} $$

инверзијом Јакобијеве матрице добијамо

$$ \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\dot{\mathbf{s}}. \tag{4.72} $$

Уколико је позната почетна поза робота $\mathbf{q}^{POC}$ која је блиска очекиваном решењу (тј. ако су познати углови у зглобовима робота који доводе хватаљку у околину очекиваног положаја и оријентације) тада се позиције у зглобовима могу пронаћи интеграцијом брзина у зглобовима над посматраним временским интервалом

$$ \mathbf{q}\,(t) = \mathbf{q}^{POC}\,(t) + \int_{t}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{q}}\,(\tau)d\tau. \tag{4.73} $$

Ако интеграцију реализујемо у дискретном времену, најједноставнијом Ојлеровом методом интеграције, горњи израз постаје

$$ \mathbf{q}\,(t+\Delta t) = \mathbf{q}^{POC}\,(t) + \dot{\mathbf{q}}\,(t)\,\Delta t. \tag{4.74} $$

[1] Начин одређивања брзина кретања зглобова механизма тако да се оствари жељени вектор брзине кретања хватаљке је познат као "ресолвед мотион рате цонтрол" и у роботику га је 1969 год. увео Wхитнеy (за више детаља видети рад, Wхитнеy, Д.Е., Ресолвед мотион рате цонтрол оф манипулаторс анд хуман простхесес, ИЕЕЕ Трансацтионс он Ман-Мацхине Сустемс, Вол. 10, Но. 2, пп. 47 – 53, 1969).

Уколико на (4.74) применимо (4.72) следи

$$\mathbf{q}\left(t+\Delta t\right)=\mathbf{q}^{POC}\left(t\right)+\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}(t))\cdot\dot{\mathbf{s}}(t)\cdot\Delta t, \tag{4.75}$$

или са модификованом нотацијом

$$\mathbf{q}^{(k+1)}=\mathbf{q}^{(k)}+\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{q}^{(k)}\right)\Delta\mathbf{s}^{(k)}. \tag{4.76}$$

где индекс κ одговара κ-тој итерацији.

Нека су задати жељени положај и оријентација хватаљке вектором спољашњих координата $\mathbf{s}^0$ и нека је потребно да се одреди вектор унутрашњих координата које одговарају $\mathbf{s}^0$. Односно, тражимо такав вектор унутрашњих координата $\mathbf{q}^*$ који ће резултирати у жељеном положају и оријентацији хватаљке, односно $\mathbf{s}^0=\mathbf{DK}(\mathbf{q}^*)$, где је $\mathbf{DK}$ функција која решава директан кинематски проблем, односно трансформише унутрашње координате у спољашње. Претпоставимо најпре приближно решење $\mathbf{q}^{(k)}$. Када се на основу претпостављеног решења $\mathbf{q}^{(k)}$ срачуна позиција хватаљке појавиће грешка $\Delta\mathbf{s}^{(k)}$ између тачне и претпостављене позе:

$$\Delta\mathbf{s}^{(k)}=\mathbf{s}^0-\mathbf{DK}\left(\mathbf{q}^{(\mathbf{k})}\right) \tag{4.77}$$

. Да би смо смањили ту грешку позу врха робота морамо померити у правцу грешке, односно на основу претходног израза и (4.76) добијамо:

$$\mathbf{q}^{(k+1)}\approx\mathbf{q}^{(k)}+\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{q}^{(k)}\right)\cdot\Delta\mathbf{s}^{(k)}=\mathbf{q}^{(k)}+\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{q}^{(k)}\right)\cdot\left(\mathbf{s}^0-\mathbf{DK}\left(\mathbf{q}^{(\mathbf{k})}\right)\right). \tag{4.78}$$

где је $\mathbf{q}^{(k+1)}$ тачније решење инверзног кинематског проблема од почетно претпостављеног $\mathbf{q}^{(k)}$ за $\mathbf{s}^0$. Ово што представља основну релацију за итеративни поступак решавања инверзног кинематског проблема. Поступак решавања се може дефинисати следећим корацима:

корак 1: за задато $\mathbf{s}^0$ претпоставимо решење инверзног проблема $\mathbf{q}^{(0)}$;

корак 2: одредимо вредности спољашњих координата $\mathbf{s}^{(k)}$ за претпостављено $\mathbf{q}^{(k)}$, односно решимо директан кинематски проблем $\mathbf{s}^{(k)}=\mathbf{DK}(\mathbf{q}^{(\mathbf{k})})$;

корак 3: израчунамо одступање $\Delta\mathbf{s}^{(k)}$ спољашњих координата $\mathbf{s}^{(k)}$ од задатих $\mathbf{s}^0$,

корак 4: израчунамо Јакобијан $\mathbf{J}$ који одговара претпостављеном решењу $\mathbf{q}^{(k)}$;

корак 5: израчунамо инверзни Јакобијан $\mathbf{J}^{-1}$;

корак 6: на основу израза (4.78) одредимо наредно решење $\mathbf{q}^{(k+1)}$ које је ближе тачном решењу него што је било претходно;

корак 7: Описану процедуру понављамо од корака 2 све док одступање спољашњих координата $\mathbf{s}^{(k)}$ од задатих $\mathbf{s}^0$ не буде мање од унапред

задате вредности ε којом се дефинише жељена тачност решења, тј. док не буде испуњен услов,

$$\left|\Delta \mathbf{s}^{(k)}\right| < \varepsilon. \tag{4.79}$$

Приказани поступак је класична Њутнова метода за решавање система нелинеарних једначина којим се добија само једно решење и то оно које је најближе почетном претпостављеном решењу $\mathbf{q}^{(0)}$.

4.3.1 Специфичности одређивање грешке и Јакобијана

У претходном одељку смо спомињали грешку позиционирања хватаљке $\Delta\mathbf{s}$ која је дефинисана као разлика између задатог положаја хватаљке $\mathbf{s}^0$ и положаја хватаљке $\mathbf{s}$ који одговара претпостављеном решењу $\mathbf{q}$. Како знамо да постоји неколико начина за репрезентацију оријентације, самим тиме мора се водити рачуна о начину рачунања грешке $\Delta\mathbf{s}$ и одабиру одговарајућег јакобијана, јер као што смо видели, постоји неколико различитих јакобијана. Нека је се вектор спољашњих координата $\mathbf{s}$ састоји од позиције $\mathbf{p}$ и оријентације $\mathbf{o}$. Тада се грешка $\Delta\mathbf{s}$ може дефинисати на следећи начин:

$$\Delta\mathbf{s} = \begin{bmatrix}\Delta\mathbf{p} \\ \Delta\mathbf{o}\end{bmatrix} \tag{4.80}$$

где су $\Delta\mathbf{p}$ и $\Delta\mathbf{o}$ грешке у позицији и оријентацији хватаљке респективно. Што се тиче грешке у позицији, она се дефинише једноставно и не зависи од репрезентације оријентације и рачуна се као разлика између вектора задате позиције $\mathbf{p}^0$ и вектора позиције $\mathbf{p}$ који одговара претпостављеном решењу $\mathbf{q}$. Ова грешка се рачуна на следећи начин:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}^0 - \mathbf{p}. \tag{4.81}$$

Насупрот овоме, грешка у оријентацији зависи од репрезентације оријентације и то ћемо разложити на неколико случајева.

4.3.1.1 Случај 1: Репрезентација оријентације Ојлеровим угловима

У случају када се оријентација представља Ојлеровим угловима, рачунане грешке у оријентацији се своди на разлику између задатих (ϕ^0, θ^0 и ψ^0) и Ојлерових углова за тренутну конфигурацију (ϕ, θ и ψ):

$$\Delta\mathbf{o} = \begin{bmatrix}\phi^0 \\ \theta^0 \\ \psi^0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\phi \\ \theta \\ \psi\end{bmatrix}. \tag{4.82}$$

Оно што је веома битно напоменути јесте да се у овом случају приликом решавања инвезног кинематског проблема у једначини (4.78) користи *аналитички Јакобијан* за задате Ојлерове углове. Начин срачуанавања аналитичког јакобијана као и његова веза са геометријским Јакобијаном за ZYZ Ојлерове углове описанаи су у поглављима 4.2.2 и 4.2.3.

4.3.1.2 Случај 2: Репрезентација оријентације кватерниона

Слично претходном случају, рачунане грешке у оријентацији се своди на разлику између задатих ($\mathbf{q}^0$) и кватерниона за тренутну конфигурацију ($\mathbf{q}$):

$$\Delta\mathbf{o} = \mathbf{q}^0 - \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_x^0 - \mathbf{q}_x \\ \mathbf{q}_y^0 - \mathbf{q}_y \\ \mathbf{q}_z^0 - \mathbf{q}_z \\ \mathbf{q}_w^0 - \mathbf{q}_w \end{bmatrix}. \tag{4.83}$$

где су $\mathbf{q}_x^0$, $\mathbf{q}_y^0$, $\mathbf{q}_z^0$ и $\mathbf{q}_w^0$ компоненте задатог кватернаиона, а $\mathbf{q}_x$, $\mathbf{q}_y$, $\mathbf{q}_z$ и $\mathbf{q}_w$ компоненте кватернаиона за тренутну конфигурацију. У овом случају се приликом решавања инверзног кинематског проблема користи Јакобијан везан за ротацију изражену кватернионима (4.70).

4.3.1.3 Случај 3: Репрезентација оријентације матрицом ротације

Уколико користимо репрезентацију оријентације матрицом ротације, простом разликом матрица добиће се поново матрица и она као таква не би могла да се искористи за решавање инверзног кинематског проблема. Да би то превазишли позовимо се на израз за извод матрице ротације (4.14), уз претпоставку да је грешка оријентавије $\Delta o \approx \boldsymbol{\omega}\Delta t$, где је $\boldsymbol{\omega}$ угаона брзина која води врх робота ка жељеној оријентацији, можемо записати:

$$\Delta\mathbf{R} = \mathbf{R}^0 - \mathbf{R} \approx \mathbf{S}(\Delta o) \cdot \mathbf{R} \tag{4.84}$$

где су $\mathbf{R}^0$ и $\mathbf{R}$ матрице ротације за задату и тренутну конфигурацију респективно. На основу овог израза можемо одредити кососиметричну матрицу $\mathbf{S}(\Delta\mathbf{o})$ и онда је:

$$\mathbf{S}(\Delta\mathbf{o}) = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = (\mathbf{R}^0 - \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}^T. \tag{4.85}$$

На основу тога и дефиниције кососиметричне матрице (4.9), можемо записати:

$$\Delta\mathbf{o} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s_{32} - s_{23} \\ s_{13} - s_{31} \\ s_{21} - s_{12} \end{bmatrix}. \tag{4.86}$$

Уколико овако рачунамо грешку оријентације, имајући у виду претпоставку $\Delta o \approx \boldsymbol{\omega}\Delta t$ приликом решавања инверзног кинематског проблема користимо *геометријски Јакобијан*, управо зато што он даје везу између линеарне и угаоне брзине робота и углова у зглобовима.

4.4 ПСЕУДО-ИНВЕРЗНИ ЈАКОБИЈАН

Претходно описани поступак нумеричког решавања инверзног кинематског проблема је базиран на релацији

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\dot{\mathbf{s}} \tag{4.87}$$

односно на претпоставци да је могуће одредити инверзни Јакобијан $\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}$, тј. да је матрица $\mathbf{J}$ квадратна и да није сингуларна.

Ако са m означимо димензију вектора спољашњих координата $\mathbf{s}$, а са n број степени слободе механичке конфигурације робота, можемо разликовати три случаја:

4.4.1 Случај 1: $m = n$

У овом случају је јакобијева матрица квадратна те се може одредити њена инверзна матрица

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\dot{\mathbf{s}}$$

ако је њена детерминанта различита од нуле. Положаји робота у којима је $\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}) = 0$ представљају сингуларне тачке у којима се не може одредити инверзни Јакобијан.

4.4.2 Случај 2: $m > n$

У овом случају број степени слободе задатка је већи од броја степени слободе робота па се може догодити да не постоји $\dot{\mathbf{q}}$ које је решење система (4.71). Другим речима број једначина је већи од броја непознатих у систему. Стога се прибегава тражењу решења које задовољава систем уз најмању грешку. Обележимо са $\dot{\mathbf{q}}^*$ вектор координата зглобова који задовољава услов да је грешка дефинисана изразом

$$G = e^2 = (\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^* - \dot{\mathbf{s}})^T (\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^* - \dot{\mathbf{s}}) \tag{4.88}$$

минимална. Развојем горњег израза добијамо

$$G = (\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^*)^T (\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^*) - 2(\dot{\mathbf{s}})^T\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^* + \dot{\mathbf{s}}^T\dot{\mathbf{s}}. \tag{4.89}$$

Да би минимизирали грешку диференцирајмо горњи израз и изједначимо га са нулом тј. $\partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{q} = 0$

$$\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}(\dot{\mathbf{q}}^{*T}\left(\mathbf{J}^T\mathbf{J}\right)\dot{\mathbf{q}}^*) - \frac{\partial}{\partial q}(2\dot{\mathbf{s}}^T\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^*) = 0. \tag{4.90}$$

Сређивањем израза добијамо

$$\left(\mathbf{J}^T\mathbf{J}\right)\dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{J}^T\dot{\mathbf{s}} \tag{4.91}$$

одакле следи

$$\dot{\mathbf{q}}^* = \left(\mathbf{J}^T\mathbf{J}\right)^{-1}\mathbf{J}^T\dot{\mathbf{s}}$$

под условом да $\left(\mathbf{J}^T\mathbf{J}\right)^{-1}$ постоји. Матрица $\left(\mathbf{J}^T\mathbf{J}\right)^{-1}\mathbf{J}^T$ се назива левим псеудо инверзним Јакобијаном. Ако ову матрицу обележимо са $\mathbf{J}_L^\dagger$ можемо писати

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_L^\dagger \dot{\mathbf{s}} \tag{4.92}$$

чиме су одређене координате зглобова тако да грешка позиционирања буде минимална.

4.4.3 Случај 3: $m < n$ - Редундантан манипулатор

У овом случају је број степени слободе који захтева задатак мањи од броја степени слободе који поседује роботски манипулатор (манипулатор је редундантан), тј. број једначина је мањи од броја непознатих у систему па постоји бесконачно много решења од којих треба одабрати једно. Један од начина за избор решења је да Еуклидова норма буде минимална. Ово решење можемо добити методом Лагранжевих множитеља. Ако је $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...\lambda_m]^T$ вектор Лагранжевих множитеља, можемо поставити нову функцију циља

$$\psi(\dot{\mathbf{q}}) = (\dot{\mathbf{q}})^T (\dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{s}}) \tag{4.93}$$

која је минимална када је $\partial\psi/\partial\mathbf{q} = 0$, па се може писати

$$2\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^T\boldsymbol{\lambda} = 0 \tag{4.94}$$

одакле следи

$$\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{J}^T\boldsymbol{\lambda}/2. \tag{4.95}$$

Заменом овог израза у полазни израз (4.71) $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ следи

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}(-\mathbf{J}^T\boldsymbol{\lambda}/2), \tag{4.96}$$

па се после сређивања добија

$$\boldsymbol{\lambda} = -2(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}\dot{\mathbf{s}} \tag{4.97}$$

под условом да $(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$ постоји. Замењујући овај израз у (4.68) и након једноставних трансформација добијамо

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}\dot{\mathbf{s}}. \tag{4.98}$$

Матрица $\mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$ се назива десним псеудоинверзним Јакобијаном који ћемо као и у претходном случају обележити са $\mathbf{J}_D^\dagger$, па се коначно може писати

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_D^\dagger \dot{\mathbf{s}}, \tag{4.99}$$

одакле можемо одредити тражене координате зглобова. На описани начин се може превазићи проблем када Јакобијан није квадратни и када због тога није могуће одредити инверзну матрицу.

4.4.4 Мур-Пенрозова псеудоинверзна матрица

У претходним полгаљима приликом разматрања инверзног кинематскиг проблема у зависности од броја зглобова робота и броја степени слободе задатка смо рачнунали различите инверзне или псеудоинверзне матрице. Један од начина да се ово унифицира јесте да се користи Мур-Пенрозова псеудоинверзна матрица (скраћено МП инверзна). Она је једнозначно дефинисана и постоји за све матрице, укључујући матрице које нису квадратне и које немају пун ранг. Означава са $\mathbf{J}^+$ и она испуњава следеће услове:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\mathbf{J}^+\mathbf{J} &= \mathbf{J} \\ \mathbf{J}^+\mathbf{J}\mathbf{J}^+ &= \mathbf{J}^+ \\ (\mathbf{J}^+\mathbf{J})^T &= \mathbf{J}^+\mathbf{J} \\ (\mathbf{J}\mathbf{J}^+)^T &= \mathbf{J}\mathbf{J}^+. \end{aligned}$$

Уколико искористимо декомпозицију на сингуларне вредности (енг. *Singular Value Decomposition, SVD*) матрице $\mathbf{J}$ можемо записати:

$$\mathbf{J} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T, \tag{4.100}$$

гђе је $\mathbf{U}$ квадратна ортогонална димензије $m \times m$, а $\mathbf{\Sigma}$ дијагонална матрица димензије $m \times n$ која садржи сингуларне вредности σ_i матрице $\mathbf{J}$ на дијагонали. Матрица $\mathbf{V}$ је квадратна ортогонална матрица димензије $n \times n$. На основу ове декомпозиције МП инверзна матрица се може израчунати као:

$$\mathbf{J}^+ = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^T \tag{4.101}$$

где је $\mathbf{\Sigma}^+$ дијагонална матрица димензије $n \times m$ која садржи реципрочне сингуларни вредности различитих од нуле σ_i. Односно:

$$\mathbf{\Sigma}^+ = diag\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \cdots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \cdots, 0\right) \tag{4.102}$$

гђе је r ранг матрице $\mathbf{J}$ и σ_r најмања сингуларна вредност различита од нуле. Самим тиме, $\mathbf{\Sigma}^+$ на дијагонали има r реципрочних сингуларних вредности различитих од нуле и $p - r$ нула, где је p мања димензија матрице $\mathbf{J}$.

Овде треба напоменути да је МП инверзна матрица за несингуларне квадратне матрице једнака инверзној матрици (види поглавље 4.4.1), за високе матрице пуног ранга једнака левој псеудоинверзној матрици (види поглавље 4.4.2) и за широке матрице пуног ранга једнака десној псеудоинверзној матрици (види поглавље 4.4.3). Коришћењем МП инверзне матрице се сва три претходна случаја унифицирају у један. То практично значи да се сва три претходна случаја могу решити:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+\dot{\mathbf{s}} \tag{4.103}$$

где је $\mathbf{J}^+$ Мур-Пенрозова псеудоинверзна матрица.

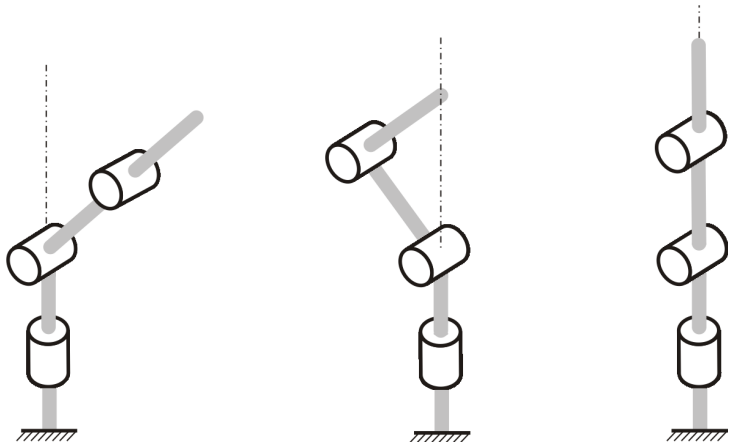
4.5 СИНГУЛАРНЕ КОНФИГУРАЦИЈЕ

Као што смо већ видели, линеарна веза између брзине хватаљке изражене у спољашњим координатама и брзина у зглобовима

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

је успостављена Јакобијаном. Уколико такву везу, при одређеним положајима (конфигурацијама) механичке структуре робота, није могуће једнозначно успоставити говоримо о појави *сингуларних* конфигурација. Математичким речником речено, сингуларне су оне конфигурације механичке структуре при којима матрица $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ нема пуни ранг. Сингуларни положаји се одликују следећим особинама:

- У сингуларном положају робот губи један или више СС. Као пример оваквог случаја наведимо било који робот чија хватаљка је достигла границу радног простора (спољну или унутрашњу). Овај случај одговара ситуацији са сл. 4.3а (хватаљка је на спољашној граници радног простора) или када је трећи сегмент савијен потпуно наниже $q_3 = \pi$.
- У сингуларном положају може постојати бесконачно много решења инверзног кинематског проблема (сл. 4.3б).

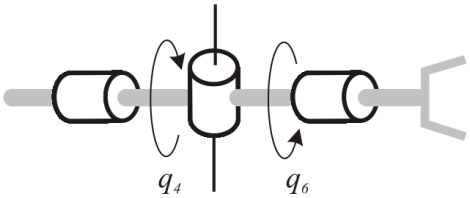


(а) *(б)* *(в)*

Слика 4.3: Сингуларни положаји антропоморфне минималне конфигурације

Да би илустровали овај случај посматрајмо минималну конфигурацију (само прва три степена слободе) антропоморфне конфигурације у положају који је приказан на сл. 4.3б. С обзиром да се врх минималне конфигурације налази на оси обртања првог зглоба њен положај не зависи од тренутне вредности угла q_1 и овај положај је остварен за било коју вредност угла q_1. Ово важи за било које вредности углова q_2 и q_3 ако је испуњено да се врх минималне конфигурације налази на вертикалној оси обртања, па и за случај када је $q_2 = q_3 = 0$ и када је механичка структура робота потпуно испружена навише (сл. 4.3в). Други пример којим овакву ситуацију можемо илустровати је сферни (Ојлеров) зглоб хватаљке робота у положају који је приказан на сл.

4.4. Уочимо да, уколико су угаоне брзине у четвртом и шестом зглобу једнаке по интензитету а супротне по смеру ($\dot{q}_4 = -\dot{q}_6$) хватаљка ће мировати.



Слика 4.4: Сингулани положај сферног зглоба

Као што је већ поменуто, при појави сингуларитета Јакобијан губи пуни ранг. Међутим, срачунавање услова за појаву сингуларитета се може поједноставити ако се механичка структура робота распрегне на минималну конфигурацију и зглоб хватаљке. У том случају Јакобијан робота са шест степени слободе се у блокформи може приказати на следећи начин

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix}. \tag{4.104}$$

Блокови $\mathbf{J}_{11}$ и $\mathbf{J}_{21}$ одговарају минималној конфигурацији, а блокови $\mathbf{J}_{12}$ и $\mathbf{J}_{22}$ зглобу хватаљке. У случају да је зглоб хватаљке сферни, матрице $\mathbf{J}_{12}$ и $\mathbf{J}_{22}$ су дате са:

$$\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_3 \times \mathbf{r}_{3,H} & \mathbf{z}_4 \times \mathbf{r}_{4,H} & \mathbf{z}_5 \times \mathbf{r}_{5,H} \end{bmatrix}, \; \mathbf{J}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_3 & \mathbf{z}_4 & \mathbf{z}_5 \end{bmatrix} \tag{4.105}$$

где је коришћена нотација из одељка 4.2.1. С обзиром да се положај координатног система хватаљке може слободно бирати, као и да резултат не зависи од избора координатног система у односу на који је изражен сместимо га у центар зглоба (место где се све три осе секу) пошто је тада испуњено $\mathbf{r}_{i-1,H} = 0$, $i = 4, 5, 6$. У том случају матрица $\mathbf{J}_{12}$ постаје

$$\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.106}$$

па матрица $\mathbf{J}$ постаје блок доње-троугаона матрица, што знатно поједностављује срачунавање детерминанте

$$\det(\mathbf{J}) = \det(\mathbf{J}_{11}) \det(\mathbf{J}_{22}), \tag{4.107}$$

одакле се услови сингуларности за минималну конфигурацију могу написати као

$$\det(\mathbf{J}_{11}) = 0, \tag{4.108}$$

док за зглоб хватаљке важи следећи услов сингуларности

$$\det(\mathbf{J}_{22}) = 0. \tag{4.109}$$

чиме је постигнуто распрегнуто разматрање услова сингуларности.

4.6 ЕЛИПСОИД БРЗИНЕ И МАНИПУЛАБИЛНОСТ

Као што смо већ видели, брзина врха робота зависи од брзина у зглобовима и Јакобијана који директно зависи од конфигурације у којем се робот налази као и саме конструкције робота која је до сада изражавана кроз ДХ параметре. Самим тиме, брзине које врх робота може остварити зависи директно од кофнигурације робота. На основу овога могу се развити индикатори перформанси робота који нам помажу приликом његовог дизајна. Уз то, индикатори који нам говоре које брзине врх робота може остварити нам могу помоћи приликом одабира одговарајућег робота за одређени задатак као и у ком делу радног простора би било оптимално да се задатак обавља.

Претпоставимо да имамо јединичну брзину у зглобовима робота што можемо записати као:

$$\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 = \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} = 1. \tag{4.110}$$

Ово представља јединичну сферу у простору брзина у зглобовима робота. Користећи везу између брзина у зглобвима и брзине врха робота (4.71) можемо записати:

$$\mathbf{v}^T \left(\mathbf{J}\left(\mathbf{q}\right) \mathbf{J}\left(\mathbf{q}\right)^T \right)^{-1} \mathbf{v} = 1, \tag{4.111}$$

чиме добијамо елипсоид у простору брзина врха робота $\mathbf{v}$, који зовемо елипсоид брзине. Битно је напоменути да овај израз важи када је Јакобијан квадратни или широк. То су случајеви када робот има тачно онолико зглобова колико је потребно за остваривање задатка и веза између брзина у зглобовима и брзина врха робота је преко инверзног Јакобијана (види поглавље 4.4.1) , као и случај редундантног робота када је веза између брзина у зглобовима и брзина врха робота преко десног псеудоинверзног Јакобијана (види поглавље 4.4.3).

На основу декомпозиције на сингуларне вредности Јакобијана (4.100), уз чињеницу да је $\mathbf{V}$ ортогонална матрица, можемо добити да је:

$$\mathbf{J}\mathbf{J}^T = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{U}^T. \tag{4.112}$$

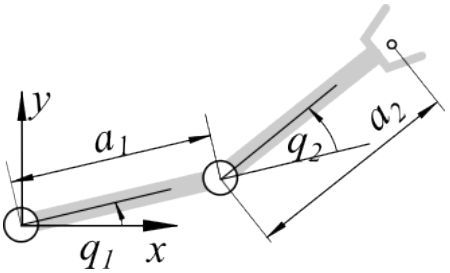
Одавде видимо да највећу брзину врха робота можемо остварити дуж првог сингуларног вектора из матрице $\mathbf{U}$ јер он управо одговара највећој сингуларној вредности Јакобијана σ_1. Најмању брзину врха робота остварујемо дуж последњег сингуларног вектора, јер он уодговара најмањој сингуларној вредности Јакобијана σ_m. Уколико је ранг Јакобијана мањи од димензије вектора брзина врха робота m, имаћемо да је $\sigma_m = 0$, па врх робота неће бити у стању да се креће дуж последњег сингуларног вектора.

Иако врло добра мера за манипулабилност, елипсоид брзине је често тешко визуализати и разумети. Зато се као мера манипулабилности може користити и мера пропорционална запремини елипсоида брзине. На основу ове мере можемо дефинисати индекс манипулабилности као:

$$w \triangleq \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \tag{4.113}$$

што се може показати да је једнако производу сингуларних вредности Јакобијана:

$$w = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m \tag{4.114}$$



Слика 4.5: Робот са два степена слободе

или у случају квадратног Јакобијана, апсолутној вредности детерминанте:

$$w = |\det(\mathbf{J})| \tag{4.115}$$

. Из овхих израза је јасно да је индекс манипулабилности $w > 0$ за све несингуларне конфигурације робота, док за сингуларне конфигурације ће важити да је $w = 0$. Овау меру је врло лако израчунати и без декомпозиција на сингуларне вредности, међутим она не говори колико је систем близу сингуларне вредности. За такве случајеве најбоље је за индикатор манипулабилности користитио однос најмање и највеће сингуларне вредности:

$$\tilde{w} = \frac{\sigma_1}{\sigma_m} \tag{4.116}$$

што је обрнуто кондиционом броју Јакобијана. Овај индекс је нешто теже израчунати, али је нешто бољи индикатор манипулабилности јер говори колико је систем близу сингуларне вредности.

Пример 4.4.

Позабавимо се манипулабилношћу раванског робота са два степан слободе приказаног на сл. 4.6. Врло лако можемо израчунати позицију врха робота:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} a_1 C1 + a_2 C12 \\ a_1 S1 + a_2 S12 \end{bmatrix}. \tag{4.117}$$

Одакле добијамо Јакобијан:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 S1 - a_2 S12 & -a_2 S12 \\ a_1 C1 + a_2 C12 & a_2 C12 \end{bmatrix}. \tag{4.118}$$

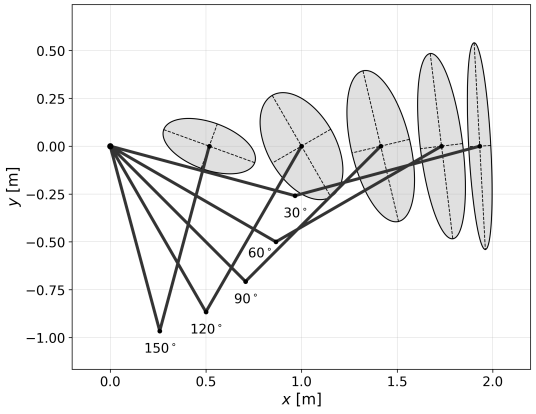
На основу израза за индекс манипулабилности за квадратни Јакобијан (4.115) можемо израчунати:

$$w = |\det(\mathbf{J})| = a_1 a_2 \, |S2| \tag{4.119}$$

Одавде видимо да је манипулабилност робота једнака нули када је угао $q_2 = 0$ или $q_2 = 180°$, што одговара случају када је роботска рука или потпуно испружена или потпуно савијена. Највећа манипулабилност робота се остварује када је угао $q_2 = 90°$. Уколико потражимо интуитивно објашњење за ово и посматрамо људску руку као двосегметни механизам, лако ћемо уочити да приилком других радњи које захтевају висок степен спретности и моторичких способности (нпр. писање, свирање гитаре, држање волана итд),

људска рука је савијена у лакту приближно 90 степени. Тиме се максимизује манипулабилност људске руке и способност да се оствари задатак. Уз овај закључак можемо и закључити да је за задату дужину руке $a_1 + a_2$ = највећа манипулабилност робота се остварује када су дужине сегмената a_1 и a_2 једнаке. И за ово можемо наћи интуитино објашњење код човека, увиђајући да је дужина надлактице приближно једнака дужини од лакта до длана шаке.

Елипсоди брзине робота у конфигурацијама када је q_2 једнак 0°, 30°, 60°, 90°, 120° или 150° су приказани на сл. 4.6. Може се уочити да како конфигурација руке прилази сингуларној, елипсоид брзине се изудужује дуж једне осе и скупља дуж друге. Управо та друга оса ће у сингуларној конфигурацији бити сведена ширину нула, чиме се елипсоид брзине дегенерише у дуж.



Слика 4.6: Елипсоди брзине робота у конфигурацијама када је q_2 једнак 0°, 30°, 60°, 90°, 120° *или* 150°

4.7 ИНВЕРЗНА МАТРИЦА РОБУСНА НА СИНГУЛАРИТЕТЕ

У претходним полгаљима приликом разматрања инверзног кинематскиг проблема по правилу јавља инверзија матрице, било Јакобијана $\mathbf{J}$, $\mathbf{JJ}^T$ или $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ у зависности од броја зглобова робота и броја степени слободе задатка. Међутим у случају да Јакобијан нема пун ранг, ове матрице су сингуларне и није могуће израчунати инверзну матрицу. Као што је већ напоменуто у том случају можемо користити МП инверзну матрицу која је дефинисана и за сингуларне матрице, межутим то се показало као непрактично.

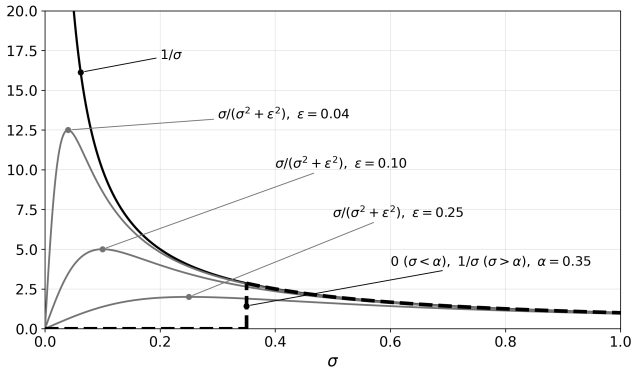
Како се робот креће и полако прилази сингуларној конфигурацији, најмања сингуларна вредност се смањује и полако прилази нули. Теоретски може бити нула, али у пракси достиже нулу због нумеричких грешака приликом рачунања. Може бити врло мали број, близак нули, што ће као резултат имати изузетно велику реципрочну вредност и велике вредности МП инверзне матрице. Тиме добијамо да за мало кретање врха робота добијамо изузетно велике брзине или помераје у зглобовима што готово по правилу није остваривo. Из тог разлога се врло често користи "праг"испод кога се сматра да је сингуларна вредност нула. Овај праг индиректно ограничава колико

су велики помераји у зглобовима. Његов одабир је проблематичан јер услед премалог прага може доћи до великих помераја а услед превеликог прага губи се на тачности. Још један проблем са њиме јесте да уноси неглаткост и потенцијалну нестабилност у алгоритму.

Из тог разлога бољe је користити пригушену инверзну матрицу. Она почива на идеји да се уместо реципрочне вредности (која је недефинисана за нулу) користи пригушена реципрочна вредност. Односно:

$$\frac{1}{\sigma} \approx \frac{\sigma}{\sigma^2 + \epsilon^2} \tag{4.120}$$

гђе је ϵ мали позитиван број. Овај израз је увек дефинисан независно од тога да ли је σ нула или не, када је $\sigma \gg \epsilon$ израз се своди на реципрочну вредност. Приказ овог ефекта је дат на слици сл. 4.7, где се може видети како изгледа реципрочна вредност сингуларне вредности са два различита пригушења као и његово поређење са инверзијом са прагом која се јавља код МП инверзне матрице.



Слика 4.7: Реципрочна вредност $1/\sigma$*, пригушена реципрочна вредност* $\sigma/(\sigma^2 + \epsilon^2)$ *за* $\epsilon = 0.04$*,* 0.10 *и* 0.25*, и инверзија са прагом* $\alpha = 0.35$

Уколико искористимо овај приступ на инверзију квадратне матрице добијамо инверзну матрицу робусну на сингуларитете (енг. *Singularity-Robust Inverse*, скраћено SR инверзна):

$$\mathbf{J}^\sharp = (\mathbf{J}^T\mathbf{J} + k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{J}^T = \mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T + k\mathbf{I})^{-1} \tag{4.121}$$

где је k параметар пригушења већи од нуле. У овом случају обична инверзна матрица увек постоји јер су $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ позитивно семидефинитне матрице а самим тиме су $\mathbf{J}^T\mathbf{J} + k\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}\mathbf{J}^T + k\mathbf{I}$ позитивно дефинитне матрице и за њих увек постоји инверзна матрица.

Наравно, овај принцип се може применити и за Јакобијан који није квадратан па би леви SR псеудоинверзни Јакобијан био:

$$\mathbf{J}_L^\sharp = (\mathbf{J}\mathbf{J}^T + k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{J}. \tag{4.122}$$

Док би десни СР псеудоинверзни Јакобијан, коришћен код редундантних робота био:

$$\mathbf{J}_D^\sharp = \mathbf{J}^T(\mathbf{J}^T\mathbf{J} + k\mathbf{I})^{-1}. \tag{4.123}$$

Коришћењем СР инверзне матрице можемо да решимо инверзни кинематски проблем и за сингуларне конфигурације коришћењем:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\sharp \dot{\mathbf{s}} \tag{4.124}$$

4.7.1 Одређивање параметра пригушења

Слично прагу приликом коришћења МП инверзне матрицке, одабир параметра пригушења k је проблематичан. Наравно високо пригушење може довести до непрецизности, док ниско пригушење може довести до великих помераја у зглобовима што није пожељно и чак потенцијално неостваривo.

Из тог разлога препоручено је да се параметар пригушења k бира као:

$$k = \begin{cases} k_0\left(1 - \frac{w}{w_0}\right)^2 & \text{за } w < w_0 \\ 0 & \text{за } w \geq w_0, \end{cases} \tag{4.125}$$

где w је индекс манипулабилности. Параметар w_0 је праг манипулабилности, који одређује околину сингуларне конфигурације у којој треба пригушити инверзну матрицу. Уколико је манипулабилност већа од тог прага, СР инверзна матрица се своди на обичну инверзну/псеудоинверзну матрицу и систем не губи на прецизности. Уколико је манипулабилност мања од прага, пригушење постепено расте до максималне вредности k_0 како се систем приближава сингуларној конфигурацији. Оваквим избором се постиже баланс између прецизности и робусности, међутим додају се два нова параметра k_0 и w_0 које треба одабрати у зависности од робота и задатка који он треба да обави.

ЛИТЕРАТУРА

An C., Atkenson C, Hollerbach J., *Model-Based Control of a Robot Manipulator*, The MIT Press, 1998.

Angeles J., *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems - Theory, Methods and Algorithms*, Springer-Verlag, 2003.

Asada H., Slotine J.J., *Robot Analysis and Control*, John Wiley and sons, 1985.

Conkur E. S., Buckingham R., *Clarifying the definition of redundancy as used in robotics*, Robotica, Vol. 15, pp 583 – 586, 1997

Craig J., *Introduction to Robotics: Mechanics & Control,* Addison–Wesley, 1986.

Nof S., (Ed.), *Handbook of industrial robotics,* John Wiley, 1985.

Potkonjak V., *Robotika*, Naučna knjiga, 1989

Rašić M., *Prilog inteligentnom upravljanju redundantnim robotima*, magistarska teza, Elektronski Fakultet u Nišu, Niš, 2000.

Sciavicco L., Siciliano B., *Modeling and Control of Robot Manipulators*, McGraw-Hill, 1996.

Selig J.M., *Introductory Robotics*, Prentice – Hall, 1992.

Siciliano B., Khatib O. (Eds.), *Springer handbook of robotics*, Springer-Verlag, 2008.

Spong M., Hutchinson S., Vidyasagar M., *Robot Modeling and Control*, John Wiley & Sons Inc., 2006.

Vukobratović M., (u saradnji sa Đurović M., Hristić D., Karan B., Kirćanski M., Kirćanski N., Stokić D., Vujić D., Živković V.), *Uvod u robotiku, Institut Mihajlo Pupin,* Beograd, 1988.

Vukobratović M., Cvetković V., Kirćanski M., *Kinamatički i dinamički prilaz sinezi kretanja manipulacionih robota*, Institut Mihajlo Pupin, Beograd, 1981

Whitney, D.E., *Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses*, IEEE Transactions on Man-Machine Systems, Vol. 10, No. 2, pp. 47 – 53, 1969.

Nakamura Y., *Advanced robotics : redundancy and optimization* Addison-Wesley Publishing Company, 1991

5. ПЛАНИРАЊЕ КРЕТАЊА

Адекватно реализовано кретање је предуслов успешне реализације било којег задатка путем робота. У овом поглављу ће бити размотрени различити начини генерисања трајекторија зглобова робота уколико је захтевано кретање хватаљке познато. Резултат генерисања кретања је дефинисано кретање зглобова $\mathbf{q}(t)$ којим треба да се обезбеди жељена позиција и оријентација врха робота дуж путање $\mathbf{r}(t) = [x_H \quad y_H \quad z_H \quad \varphi_H \quad \theta_H \quad \psi_H]^T$.

Путања хватаљке је одређена задатком и може бити мање или више сложена. У једноставнијим случајевима потреба за тачним положајем и оријентацијом хватаљке постоји само у појединим тачкама путање док се на кретање између њих не намећу посебни захтеви. Такво кретање се назива кретањем "од тачке до тачке"(*енгл.* Поинт-То-Поинт мотион) што се обележава скраћеницом ПТП. Код других врста задатака остваривање адекватног кретања дуж читаве трајекторије је суштински важно за успешну реализацију задатка. Такво кретање се назива "кретањем по континуалној путањи"(*енгл.* Цонтинуоус Патх мотион), а означава се скраћеницом ЦП. Сложене путање је погодно рашчланити на једноставније сегменте, а путању формирати њиховим надовезивањем. Синтетизовано кретање треба да оствари такав профил брзина и убрзања дуж трајекторије да кретање буде "природно", тј. глатко.

У овом поглављу ће бити размотрени начини на које се планирање кретања може остварити уз претпоставку да у радном простору робота нема препрека и да дуж целе путање постоји решење инверзног кинематског проблема. Прилаз се може лако проширити на случај када унутар радног простора постоје статичке препреке чији су величина и положај, унапред познати и непроменљиви [1].

5.1 ПЛАНИРАЊЕ ПТП КРЕТАЊА

С обзиром да у случају ПТП кретања треба специфирати само почетну и крајњу тачку путање (кретање између њих није унапред прописано) и време за које путања треба да се реализује, планирање овако задатог кретања се може једноставно реализовати и у простору спољашњих и у простору унутрашњих координата. Ипак је уобичајено да се планирање ПТП кретања обавља у простору унутрашњих координата тако што се почетна $\mathbf{r}_i$ и крајња $\mathbf{r}_f$ тачка путање задају у спољашњим координатама а затим се применом неког од алгоритама за решавање проблема инверзне кинематике израчунају унутрашње координате q_i и q_f које одговарају позицијама $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_f$.

Почетна и крајња тачка путање (којима одговарају q_i и q_f) заједно са карактеристикама кретања (укупно време кретања, максимална брзина током кретања итд.) представљају полазне параметре за генерисање трајекторије између задатих тачака. Додатни захтев који се намеће, по угледу на кретање живих бића, је да кретање буде глатко. Математички речено, трајекторије

[1] Случај да су препреке у радном простору покретне излази ван домена ове књиге па заинтересоване читаоце упућујемо на одговарајућу литературу (нпр. О. Кхатиб, Реал'Тиме Обстацле авоиданце фор Манипулаторс анд Мобиле Роботс, Тхе Интернатионал Јоурнал од Роботицс Ресеарцх, Вол. 5, Но. 1, пп. 90-98, 1986).

зглобова руке, као и да су први и други изводи (први извод позиције је брзина, а други извод је убрзање), треба да су глатке функције. Према томе, можемо рећи да глатко кретање подразумева континуалне промене позиције, брзине и убрзања.

5.1.1 Линеарна Интерполација

Полазна основа за генерисање трајекторије су почетна q_i и крајња q_f тачка путање, задате у простору унутрашњих координата. Претпоставимо да робот креће из стања мировања и треба да се заустави у крајњој тачки путање. То заправо значи да су брзине на почетку и крају кретања једнаке нули, тј. $\dot{\mathbf{q}}_i = 0$ и $\dot{\mathbf{q}}_f = 0$. Да бисмо генерисали трајекторију, потребно је још задати време расположиво за реализацију кретања. Претпоставимо зато да је укупно трајање покрета $T_f - T_i$, где је T_i временски тренутак који одговара почетној а T_f крајњој тачки путање. Без умањења општости, можемо да претпоставимо да време почињемо да рачунамо од почетка кретања, односно да је $T_i = 0$.

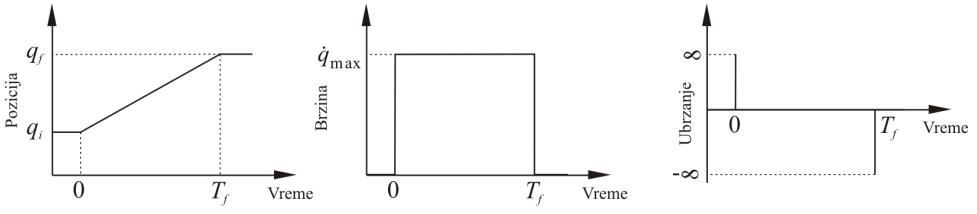
Приметимо да позиција врха робота зависи од углова у свим зглобовима, тј. да је положај робота задат у унутрашњим координатама $\mathbf{q} = [q_1 \quad \dots q_n]^T$ векторска величина. То даље значи да и интерполационе функције које тражимо треба да буду векторске функције. Међутим, с обзиром да путања по којој се врх робота креће није специфицирана (задате су само њене крајње тачке) проблем можемо поједноставити, и заправо решавати n проблема интерполације, тј. за сваки зглоб робота појединачно ако није потребно обезбедити строго синхроно кретање свих зглобова. При томе као полазне податке узимамо одговарајуће врсте из почетног и крајњег вектора положаја (q_i и q_f), док је време трајања покрета за све зглобове исто.

На даље ћемо ради прегледности, у задацима планирања кретања у простору унутрашњих координата користити скаларне ознаке за позиције, брзине и убрзања и изоставићемо ознаку индекса који показује на који зглоб се израз односи. При томе се подразумева да проблем генерисања трајекторије треба решавати за сваки зглоб појединачно.

Најпростији метод интерполације између две тачке јесте линеарна интерполација дата изразом

$$q(t) = q_i \frac{T_f - t}{T_f} + q_f \frac{t}{T_f}. \tag{5.1}$$

На сл. 5.1 је приказан облик функција позиције, брзине и убрзања у једном зглобу које су добијене линеарном интерполацијом.



Слика 5.1: Дијаграми позиције, брзине и убрзања при линеарној интерполацији између две тачке

Брзина зглоба се може одредити диференцирањем израза (5.1) по времену t, чиме се добија

$$\dot{q}(t) = \frac{q_f - q_i}{T_f}, \tag{5.2}$$

а након још једног диференцирања по времену добија се убрзање

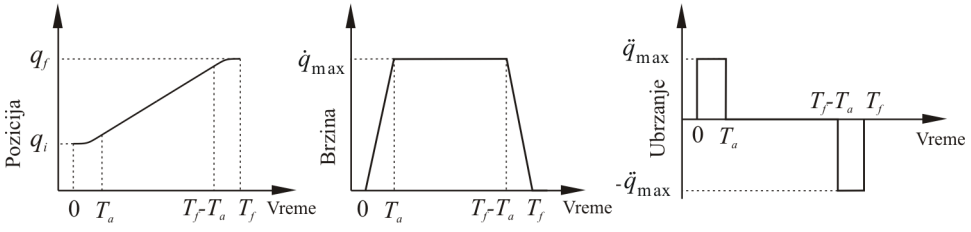
$$\ddot{q}(t) = 0. \tag{5.3}$$

На основу (5.1), (5.2) и (5.3), се види да је брзина током покрета константна па је убрзање једнако нули. Кретање константном брзином може бити од интереса у многим апликацијама робота.

Међутим, уочимо да је једначина (5.2) у супротности са усвојеном претпоставком да робот креће из стања мировања и да се зауставља након достизања крајње позиције. Пре почетка кретања брзина је једнака нули, а непосредно након почетка кретања брзина је одређена изразом (5.2). Сличан прекид постоји и на крају кретања, непосредно пре достизања крајње тачке трајекторије. Брзина је одређена изразом (5.2), а одмах затим пада на нулу, јер се робот зауставља. Тренутне скоковите промене брзине доводе до тога да потребна убрзања у почетном и крајњем тренутку теже бесконачности што, наравно, није остварив. Овај проблем се може решити тако што ће се на почетку трајекторије предвидети коначно време за убрзавање, као и на крају трајекторије за успоравање. То нас доводи до трапезног профила брзине.

5.1.2 Трапезни профил брзине

Трапезним профилом брзине се постиже да се кретање зглоба на почетку покрета убрзава, зглоб се затим покреће константном брзином и на крају покрета успорава. При томе је испуњена претпоставка да су брзине кретања зглоба на почетку и крају трајекторије једнаке нули, а да убрзања имају коначне вредности. На овај начин, робот креће из стања мировања и равномерно убрзава, затим се креће константом брзином, да би довољно пре достизања крајње позиције започео са успоравањем, при чему се брзина смањује до нуле када се и достиже крајња тачка трајекторије. Промене позиције, брзине и убрзања у случају примене трапезног профила брзине су приказане на сл. 5.2.



Слика 5.2: Промене позиције, брзине и убрзања код трапезног профила брзине

Размотримо сада са математичког аспекта описано кретање. Поново су познати почетна q_i и крајња позиција q_f, као и укупно време трајања покрета T_f. Овим параметрима се сада придружује и време T_a предвиђено за убрзавање, односно успоравање. Минимална вредност времена T_a је ограничена физичким

могућности актуатора (што је време T_a краће актуатор мора снажније да убрзава па су потребне силе/моменти већи). Са сл. 5.2. се може уочити, да је у временском интервалу од почетка кретања до тренутка $t = T_a$ убрзање позитивно, константно и износи $\ddot{q}_{max}$. Јасно је да се ради о равномерно убрзаном кретању, при чему брзина кретања линеарно расте, од нуле у стању мировања, до вредности $\dot{q}_{max}$, док се позиција мења по квадратном закону. Овај интервал представља период убрзавања кретања робота.

Од тренутка T_a до тренутка $T_f - T_a$, убрзање је једнако нули, што значи да се зглоб креће константном брзином $\dot{q}_{max}$, која се назива брзином крстарења. У овом периоду, промена позиције је линеарна функција времена.

Коначно, од тренутка $T_f - T_a$ до краја кретања, делује негативно константно убрзање $-\ddot{q}_{max}$, односно успорење, па је кретање равномерно успорено. Због тога брзина линеарно опада од брзине крстарења до нуле, када се робот зауставља. Промена позиције у овом интервалу је поново квадратна функција времена. Овај интервал кретања назива се периодом кочења. Приметимо још да брзина крстарења, максимално убрзање и период убрзавања односно кочења нису независне величине, јер важи

$$\dot{q}_{\max} = \ddot{q}_{\max} \cdot T_a. \tag{5.4}$$

Лако можемо закључити да је убрзање дато изразом

$$\ddot{q}(t) = \begin{cases} +\ddot{q}_{\max} & 0 < t \leq T_a \\ 0 & T_a < t \leq T_f - T_a \\ -\ddot{q}_{\max} & T_f - T_a < t \leq T_f \end{cases}. \tag{5.5}$$

Брзину можемо одредити интеграцијом једначине (5.5), водећи рачуна о почетним условима и вези датој изразом (5.4):

$$\dot{q}(t) = \begin{cases} \ddot{q}_{\max} \cdot t & 0 < t \leq T_a \\ \ddot{q}_{\max} \cdot T_a & T_a < t \leq T_f - T_a \\ \ddot{q}_{\max} \cdot (T_f - t) & T_f - T_a < t \leq T_f \end{cases}. \tag{5.6}$$

Израз за позицију се може добити интеграцијом израза за брзину (5.6), водећи поново рачуна о почетним условима, чиме се добија

$$q(t) = \begin{cases} q_i + 0.5 \cdot \ddot{q}_{\max} \cdot t^2 & 0 < t \leq T_a \\ q_i + \ddot{q}_{\max} \cdot T_a \cdot (t - T_a/2) & T_a < t \leq T_f - T_a \\ q_f - 0.5 \cdot \ddot{q}_{\max} \cdot (T_f - t)^2 & T_f - T_a < t \leq T_f \end{cases}. \tag{5.7}$$

Подсетимо се да су познати: опсег промене позиције од q_i до q_f, укупно време извршавања покрета T_f, као и време убрзавања, односно успоравања T_a, па је једина непозната величина у изразима (5.5), (5.6) и (5.7) максимална вредност убрзања $\ddot{q}_{max}$, која, очигледно, мора да зависи од полазних параметара.

Потребну вредност максималног убрзања одредићемо на следећи начин. Промена вредности позиције од почетне до крајње, односно пређени пут, мора бити једнак површини испод графикона брзине. С обзиром на чињеницу да

графикон има облик трапеза, лако успостављамо везу

$$q_f - q_i = (\ddot{q}_{\max} \cdot T_a) \cdot (T_f - T_a),$$

где, с обзиром на једначину (5.4), израз $\ddot{q}_{\max} \cdot T_a$ представља висину трапеза, док израз $(T_f - T_a)$ представља дужину његове средње линије. Сада потребну вредност убрзања можемо одредити као

$$\ddot{q}_{\max} = \frac{q_f - q_i}{T_a \cdot (T_f - T_a)}. \tag{5.8}$$

Приметимо још да је у свим претходним изразима логично претпостављено да важи

$$T_a \leq \frac{T_f}{2},$$

тј. да периоди убрзавања, односно кочења, морају бити мањи или једнаки половини укупног времена кретања.

У специјалном случају, када је $T_a = 0.5 \cdot T_f$ чим се достигне брзина крстарења почиње кочење па периоди убрзавања и успоравања трају по половину укупног времена кретања. Трапезни профил брзине са сл. 5.2 се тада деформише, јер се губи средишњи део током којег је брзина константна па за овакво кретање кажемо да има троугаони профил брзине. Путање у којима није могуће достићи брзину крстарења (ако се зада мали опсег промене позиције $q_f - q_i$, односно ако је $T_a > 0.5 \cdot T_f$) се реализују на овакав начин. При томе робот убрзава док не пређе половину укупног задатог опсега кретања. Тада се одмах прелази на успоравање све до заустављања. Оваквим кретањем се остварује троугаони профил брзине при чему се не достиже брзина крстарења.

Већ је речено да је кретање робота, са становишта брзине и убрзања, ограничено могућностима актуатора. То значи да с обзиром да постоји максимално убрзање које дати актуатор може да оствари у посматраном зглобу, постоји и максимална брзина кретања зглоба коју је могуће остварити. Због тога је у пракси уобичајено да се, уместо задавања времена трајања покрета и периода убрзавања односно успоравања, задају максимално убрзање, односно, жељена брзина крстарења, а временски параметри кретања се на основу њих израчунају.

Према томе, нека је познато q_i, q_f, $\dot{q}_{max}$ и $\ddot{q}_{max}$. Ако се за срачунавање потребног времена користе максималне вредности брзине и убрзања добија се најкраће време трајања покрета. На основу (5.4), лако одређујемо време потребно за убрзавање, односно кочење, као

$$T_a = \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}}.$$

Сменом добијеног израза у једначину (5.8), можемо одредити укупно трајање покрета као

$$T_f = \frac{q_f - q_i}{\dot{q}_{\max}} + \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}}.$$

Трапезни профил брзине се често примењује у пракси, не само код робота, већ и код других уређаја који захтевају кретање константном брзином, као што су на пример, алатне машине, портални дизалице, електромоторни погони, итд.

Приметимо на крају да се убрзање скоковито мења у тренуцима када почиње или се завршава убрзавање односно кочење. Ова нагла промена убрзања, се може приметити као трзај, што је непожељно јер може побудити нежељене осцилације робота. Осим тога, тренутна промена убрзања може бити тешко остварива са становишта актуатора. У наставку ће бити размотрени начини којима се може остварити континуална промена позиције, брзине и убрзања.

5.1.3 Интерполација полиномом трећег степена

Као и раније, полазна основа за генерисање трајекторије су почетна q_i и крајња q_f тачка путање, и укупно трајање покрета T_f. Робот полази из мировања и на крају трајекторије треба да се заустави. Према томе, имамо четири гранична услова, од којих се два односе на почетну,

$$q(0) = q_i, \quad \dot{q}(0) = 0,$$

а два на крајњу тачку путање

$$q(T_f) = q_f, \quad \dot{q}(T_f) = 0.$$

Задатак је да се пронађе глатка интерполациона функција којом ће бити дефинисана промена позиције током кретања између почетне и крајње тачке. Као решење се природно намећу полиномне функције, јер је опште познато да су полиноми непрекидне и диференцијабилне функције.

Пре него што пређемо на одређивање интерполационих полинома, размотримо најпре могућност да извршимо нормализацију проблема, што ће нам олакшати примену добијених полинома на синтезу кретања различитих зглобова.

Уведимо најпре нормализацију по времену, увођењем смене

$$\tau = \frac{t}{T_f}. \tag{5.9}$$

чиме се реално време t из интервала $t \in \left[0, T_f\right]$ пресликава у нормализовано време τ на интервалу $\tau \in [0, 1]$.

Уведимо затим и нормализовану позицију p тако да се интервал промене позиције q пресликава на нормализовани интервал

$$p = \frac{q - q_i}{q_f - q_i}, \quad \left[q_i, q_f\right] \xrightarrow[p(q)]{} [0, 1]\,.$$

Након ових нормализација, позиција зглоба се може одредити на основу

$$q(t)|_{t=\tau T_f} = q_i + (q_f - q_i)p(\tau). \tag{5.10}$$

Диференцирањем израза (5.10) можемо одредити брзину зглоба у функцији нормализоване брзине, као

$$\dot{q}(t) = (q_f - q_i)p'(\tau)\frac{d\tau}{dt},$$

при чему $p'(\tau)$ означава нормализовану брзину добијену диференцирањем нормализоване позиције p по нормализованом времену τ. За извод по времену t колирситимо тачку, односно $\dot{(\,)}$, док за извод по нормализованом времену τ колирситимо апостроф, односно $(\,)'$, како би експлицитно означили разлику између та два. С обзиром на (5.9), следи

$$\dot{q}(t)|_{t=\tau T_f} = \frac{q_f - q_i}{T_f}p'(\tau). \tag{5.11}$$

На сличан начин можемо одредити и убрзање зглоба у функцији нормализованог убрзања као

$$\ddot{q}(t)|_{t=\tau T_f} = \frac{q_f - q_i}{T_f^2}p''(\tau). \tag{5.12}$$

Аналогно са (5.9) $p''(\tau)$ означава нормализовано убрзање добијено диференцирањем нормализоване брзине $p'(\tau)$ по нормализованом времену τ. Дакле, проблем синтезе интерполационе функције, за кретање зглоба у реалном времену, смо заменили синтезом интерполационе функције за нормализовану позицију у нормализованом времену. При томе је извршена и нормализација граничних услова, у облику

$$p(0) = 0, \quad p'(0) = 0, \tag{5.13}$$
$$p(1) = 1, \quad p'(1) = 0. \tag{5.14}$$

С обзиром на то да имамо четири гранична услова, на основу њих можемо одредити полином трећег степена, који има укупно четири коефицијента

$$p_3(\tau) = a_3\tau^3 + a_2\tau^2 + a_1\tau + a_0, \tag{5.15}$$

где су a_0 до a_3 непознати коефицијенти. Ако диференцирамо (5.15), добијамо

$$p_3'(\tau) = 3a_3\tau^2 + 2a_2\tau + a_1.; \tag{5.16}$$

Сменом (5.13) у (5.15) и (5.16) лако можемо израчунати слободне чланове па следи:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0.$$

Сменом граничних услова (5.14) у изразе за нормализовану позицију (5.15) и брзину (5.16), добијамо систем од две једначине са две непознате облика

$$\begin{aligned} 1 &= a_3 + a_2 \\ 0 &= 3a_3 + 2a_2 \end{aligned},$$

чијим се решавањем одређују преостали непознати коефицијенти

$$a_2 = 3, \quad a_3 = -2,$$

тако да је нормализовани интерполациони полином дат са

$$p_3(\tau) = -2\tau^3 + 3\tau^2,$$

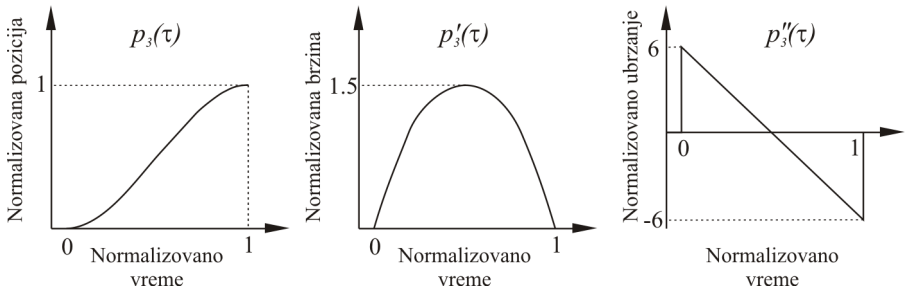
а нормализована брзина је

$$p_3'(\tau) = -6\tau^2 + 6\tau,$$

док је нормализовано убрзање дато са

$$p_3''(\tau) = -12\tau + 6.$$

Графички изглед нормализоване позиције, брзине и убрзања је приказан на сл. 5.3. Са слике уочавамо да су нормализована позиција и брзина заиста глатке функције. Приметимо да брзина креће од нуле, достиже свој максимум на половини временског интервала, а затим опада до нуле.



Слика 5.3: Нормализована позиција, брзина и убрзања код интерполације полиномом трећег степена

Максимална вредност нормализоване брзине износи

$$p_{3\,\max}' = 1.5. \tag{5.17}$$

Видимо такође да је нормализовано убрзање линеарна функција нормализованог времена, међутим није непрекидна. Наиме, у почетном тренутку, убрзање има скок од нулте на максималну позитивну вредност, а у крајњем тренутку, са максималне негативне вредности нагло пада на нулу. Максимална апсолутна вредност нормализованог убрзања износи

$$p_{3\,\max}'' = 6. \tag{5.18}$$

Као што је већ речено, скоковите промене убрзања су непожељне, а морамо бити свесни и чињенице да убрзање не може тренутно да се промени. Скоковита промена убрзања имплицира скоковиту промену силе или момента актуатора, а то даље значи велики утрошак енергије у веома кратком временском интервалу. Другим речима, кретање добијено интерполационим полиномом трећег степена није довољно глатко, јер поседује прекиде у

убрзању. Ако желимо да ове прекиде елиминишемо, потребно је увести нове граничне услове за убрзања чиме ће се повећати степен интерполационог полинома.

5.1.4 Интерполација полиномом петог степена

Ако желимо да добијемо кретање код кога убрзање неће имати дисконтинуитете, онда граничним условима по позицији и брзини морамо придружити и граничне услове по убрзању. Наиме, с обзиром на то да робот креће из мировања, а ограничења актуатора су таква да се убрзања не могу скоковито мењати онда убрзање у почетном тренутку мора бити једнако нули. Такође, ако желимо да избегнемо трзаје на крају кретања када се робот зауставља, убрзање ни овде не сме да се мења скоковито. Стога се уводи гранични услов да је убрзање у том тренутку једнако нули. Такође, нормализовано убрзање треба да је континуална функција нормализованог времена, при чему имамо два нова гранична услова везана за убрзање па се број граничних услова сада повећава на шест:

$$p(0) = 0, \quad p'(0) = 0, \quad p''(0) = 0, \tag{5.19}$$

$$p(1) = 1, \quad p'(1) = 0, \quad p''(1) = 0, \tag{5.20}$$

тако да се сада може решити интерполациони полином петог степена, облика

$$p_5(\tau) = a_5\tau^5 + a_4\tau^4 + a_3\tau^3 + a_2\tau^2 + a_1\tau + a_0, \tag{5.21}$$

при чему коефицијенте a_i, $i = 0, \ldots, 5$ одређујемо из граничних услова.

Диференцирањем израза (5.21) по нормализованом времену добија се израз за нормализовану брзину, чијим диференцирањем добијамо израз за нормализовано убрзање. Сменом граничних услова (5.19) и (5.20) у полиноме за нормализовану позицију, брзину и убрзање добија се систем једначина чијим решавањем се одређују непознати коефицијенти. Коначно решење је облика

$$p_5(\tau) = 6\tau^5 - 15\tau^4 + 10\tau^3,$$

док је израз за нормализовану брзину дат са

$$p_5'(\tau) = 30\tau^4 - 60\tau^3 + 30\tau^2,$$

а нормализовано убрзање је одређено са

$$p_5''(\tau) = 120\tau^3 - 180\tau^2 + 60\tau.$$

Зависност нормализоване позиције, брзине и убрзања у функцији нормализованог времена је графички приказана на сл. 5.4. Упоредимо ли добијене резултате са интерполационим полиномом трећег степена примећујемо да је крива нормализоване позиције нешто стрмија у средини временског интервала, а нешто више заравњена на почетку и крају кретања, што је последица чињенице да је тада убрзање једнако нули. На графикону нормализоване брзине, примећујемо да крива има звонасти облик, при чему је крива ужа него код полинома трећег степена. С обзиром на то да је пређени пут једнак у оба случаја, и да одговара површини испод криве брзине, максимална брзина, која се поново јавља у средини интервала, је већа него код полинома трећег

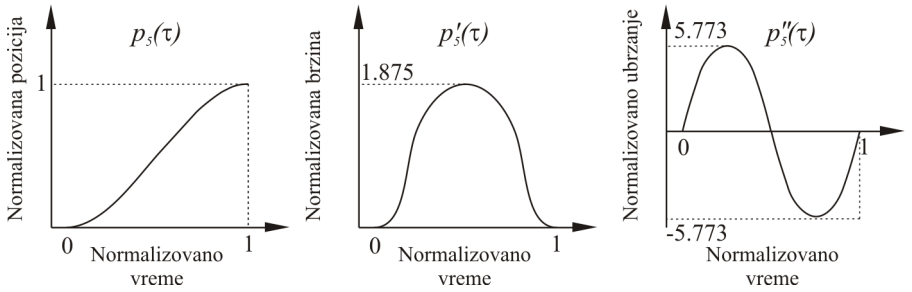
реда, и износи

$$q'_{5\,\max} = 15/8 = 1.875. \tag{5.22}$$

Коначно, са графикона убрзања се види континуална промена убрзања, а максимална апсолутна вредност износи

$$q''_{5\,\max} = 10\sqrt{3}\Big/3 = 5.773. \tag{5.23}$$

Видимо да је у случају интерполације полиномом петог степена остварено глатко кретање при чему ни крива промене убрзања нема прекиде.



Слика 5.4: Нормализована позиција, брзина и убрзања код интерполације полиномом петог степена

Сл. **??** Нормализована позиција, брзина и убрзања код интерполације полиномом петог степена У неким апликацијама робота, од интереса је да извод убрзања, односно, трећи извод позиције, такође буде континуална функција. Да би то постигли, граничним условима (5.19) и (5.20) додају се још услови по трећем изводу позиције

$$p'''(0) = 0, \quad p'''(1) = 0, \tag{5.24}$$

чиме се укупан број услова повећао на осам.

Извод убрзања у литератури се обично означава као "трзај", што је слободан превод енглеског термина "*јерк*". Граничним условом (5.24) се остварује да трзај на почетку кретања, као и при доласку робота у крајњу позицију буде једнак нули.

5.1.5 Примена нормализованих интерполационих полинома

Применом нормализације по времену и по амплитуди, изразе за полиноме различитих степени смо учинили независним од стварних параметара кретања. Да би се изрази искористили у пракси, морају се путем релација (5.10), (5.11), и (5.12) вратити у реално време и учинити одговарајућим за реалне опсеге промене унутрашњих координата.

При томе је опсег промене унутрашњих координата задат задатком, односно, познате су почетна q_i и крајња q_f вредност угла у зглобу. Већ смо рекли, да се због лимитираних могућности актуатора, у пракси чешће као параметри задају максимална дозвољена убрзања и брзине, уместо времена

трајања покрета. Разлог је врло једноставан. Ако се зада сувише кратко време, може се десити да трајекторија не може физички да се оствари. Ако се пак, зада сувише дугачко време, онда се покрети изводе непотребно споро.

Размотримо сада поступак одређивања времена трајања реализације кретања дуж трајекторије уколико су познате максималне дозвољене (или жељене) величине брзине $\dot{q}_{\max}$ и убрзања $\ddot{q}_{\max}$ зглоба.

С обзиром на везу дату једначином (5.11) између брзине зглоба и нормализоване брзине, може се успоставити релација између максималних вредности стварне и нормализоване брзине

$$\dot{q}_{\max} = \frac{q_f - q_i}{T_{fv}} p'_{\max},$$

одакле се одређује потребно време трајања покрета, као

$$T_{fv} = \frac{q_f - q_i}{\dot{q}_{\max}} p'_{\max}. \tag{5.25}$$

Сличном анализом, на основу једначине (5.12), могуће је да се одреди потребно време трајања реализације покрета с обзиром на максимално могуће убрзање, као

$$T_{fa} = \sqrt{\frac{q_f - q_i}{\ddot{q}_{\max}} p''_{\max}}, \tag{5.26}$$

при чему се, у изразе (5.25) и (5.25) смењују максималне вредности нормализованих брзина (изрази (5.17) и (5.22)), односно максималне вредности нормализованих убрзања (изрази (5.18) и (5.23)). За потребно време трајања покрета зглоба усваја се најдуже време, тј.

$$T_f = \max\{T_{fv}, T_{fa}\},$$

да би се избегло постављање захтева који постојећи актуатори не могу остварити.

С обзиром да кретање зглобова није идентично (различите промене углова током покрета, различите максималне вредности брзина и убрзања итд.) добијена потребна времена трајања покрета у појединачним зглобовима неће бити иста. У општем случају ћемо добити скуп од n различитих времена трајања покрета

$$\{T_{f1}, \ldots, T_{fi}, \ldots T_{f_n}\}$$

па нам на располагању стоје две могућности. Према првој, можемо пустити да се сваки зглоб креће сагласно претходно одређеним (максималним) параметрима кретања. При томе ће времена кретања за поједине зглобове бити различита, односно, неки зглобови ће раније завршити покрет од других. Друга могућност је да усвојимо да ће трајање покрета за све зглобове бити исто, а да за време извршења покрета усвојимо најдуже израчунато време

$$T_f = \max_i(T_{fi}). \tag{5.27}$$

Приметимо да ће се, у случају када је време извршења покрета за све

зглобове исто, максималном брзином кретати само зглоб за кога је у (5.27) добијено најдуже време извршења покрета, док ће се преостали зглобови кретати спорије од својих максималних могућности.

5.1.6 Надовезивање трајекторија

Све технике које смо до сада обрадили, бавиле су се проблем синтезе једног покрета (кретање од тачке до тачке), при чему робот полази из стања мировања и у завршној тачки путање се поново заустављa. Сада ћемо размотрити проблематику надовезивања када се трајекторија формира од више сегмената, при чему је завршна тачка претходног сегмента уједно и почетна тачка наредног. Тачке у којима се два сегмента надовезују често се називају чворним тачкама путање, (*енгл.* патх кнот поинт).

Једно од могућих решења је да сваки сегмент путање третирамо независно од осталих, применом неке од интерполационих функција које смо већ размотрили. Тиме се проблем синтезе укупне трајекторије своди на проблем синтезе њених појединих сегмената. Основна мана оваквог приступа је што ће у чворним тачкама доћи до заустављања робота. Овакво кретање, осим што делује неприродно јер је испрекидано честим заустављањем, захтева и дуже време извршавања у односу на кретање код којег би робот кроз чворне тачке прошао без заустављања, односно са брзином различитом од нуле.

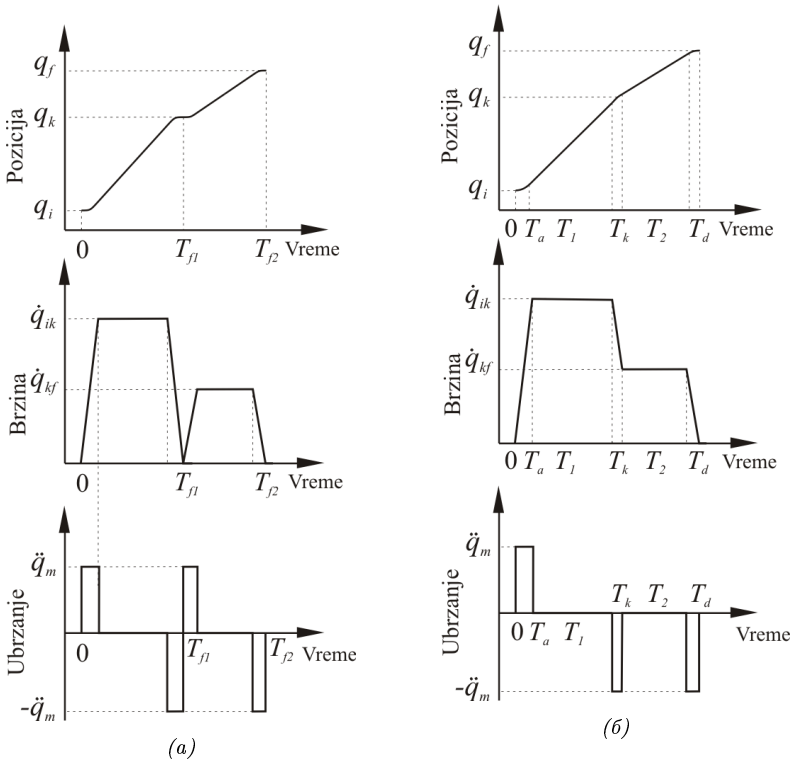
Ако желимо да избегнемо заустављање у чворним тачкама, мора се другачије приступити решавању проблема синтезе трајекторије. Размотримо, најпре, надовезивање трајекторија код трапезног профила брзине тако да брзина крстарења не буде константна већ да има две вредности. Тачка у којој се са једне брзине крстарења прелази на другу представља чворну тачку. Према томе, у овом случају имамо три карактеристичне тачке (q_i, q_k и q_f,) где су као и раније, q_i и q_f почетна и крајња тачка путање, а q_k је чворна тачка између њих која раздваја сегменте путање са различитим брзинама крстарења. Претпоставимо даље, да је жељена брзина крстарења на првом сегменту $\dot{q}_{ik}$ а на другом $\dot{q}_{kf}$, и да су ове две брзине различите. Нека је дато и максимално убрзање $\ddot{q}_m$ које је исто на оба дела трајекторије јер се реализује истим актуатором. Применом класичног поступка синтезе трајекторије са трапезним профилом брзине, за сваки сегмент путање појединачно, добија се резултујуће кретање које је приказано на сл. 5.5а.

У овом примеру, кретање дуж оба сегмента путање је у истом смеру. Уочавамо да у чворној тачки брзина кретања опада са вредности $\dot{q}_{kf}$ до нуле, а затим расте до вредности $\dot{q}_{ik}$. Другим речима, кретање се заустављa у чворној тачки. Природно се намеће закључак да би било знатно повољније када брзина не би опадала на нулу већ се само променила од $\dot{q}_{ik}$ до $\dot{q}_{kf}$. То се може постићи уколико се два трапезна профила делимично преклопе (сл. 5.5б).

Основни проблем при преклапању брзина без заустављања у чворној тачки је избор тренутка T_i у ком треба започети прелазак (транзицију) са тренутне $\dot{q}_{ik}$ на нову брзину крстарења $\dot{q}_{kf}$ и период трајања прелаза Δt_{tran}. Избор временског тренутка T_i и трајање прелаза на нову брзину Δt_{tran} није једнозначан и одабране вредности утичу на укупан пут који прелази сегмент.

С обзиром на то да је број могућности за избор тренутка почетка кочења, вредности убрзања и успорења, вредности брзине на појединим сегментима, итд. веома велики, извођење једначина које описују модификацију трапезног

профила би захтевало исувише простора. Читаоцима је остављено за вежбу да самостално изведу једначине за жељени режим спајања сегмената.



Слика 5.5: Надовезивање трајекторија са трапезним профилом брзине а) са заустављањем у чворној тачки и б) без заустављања у чворној тачки

5.1.7 Интерполација полиномима

Размотримо сада проблем надовезивања трајекторија у случају да је интерполација релизована полиномом. Наиме, додавање нових чворних тачака представља заправо додавање нових услова, односно нових података о трајекторији. Због тога се степен интерполационог полинома може повећати, јер се може одредити већи број непознатих коефицијената. Ако је, поред позиције чворне тачке, задата и брзина у њој, онда је количина информација о трајекторији (број услова) још већа, па је степен интерполационог полинома већи. Проблем полиномне интерполације кроз чворне тачке је добро изучен у нумеричкој математици. Јединствено решење за проблем са n чворних тачака се добија коришћењем Лагранжовог интерполационог полинома n-тог степена, а ако су поред позиција задате и брзине у m чворних тачака, коришћењем Хермитовог интерполационог полинома $(n+m)$-тог степена.

Напоменимо одмах да се овакав приступ веома ретко користи у пракси, иако на први поглед делује атрактивно. Наиме, са повећањем броја чворних тачака, расте степен интерполационог полинома. Из алгебре је познато да полином n-тог степена има тачно n нула, па полиноми високог степена теже

осцилаторном понашању. Иако Лагранжов и Хермитов алгоритам гарантују да ће интерполациони полином проћи кроз чворне тачке, нема никаквих показатеља о понашању полинома између чворних тачака, а оно је најчешће осцилаторно. То би заправо значило, да крећући се од једне чворне тачке ка наредној, робот направи прескок па се врати у чворну тачку, или најпре пође у супротну страну, па онда промени смер и врати се у чворну тачку. То није понашање какво бисмо желели.

Због тога се прибегава другачијем решењу. Укупан интервал интерполације се дели на подинтервале, између чворних тачака. На сваком подинтервалу се усваја интерполациона функција у облику полинома нижег степена, најчешће трећег, а систему услова, односно ограничења, поред задатих чворних тачака, додају се услови континуалности брзине односно убрзања у чворним тачкама. Другим речима, иако брзина и убрзање у чворним тачкама нису унапред одређени, захтева се њихова непрекидност, односно, вредности добијене на основу претходног и наредног интерполационог полинома морају бити једнаке. Оваква врста интерполације назива се интерполацијом сплајновима, а када су у питању полиноми трећег степена, говоримо о интерполацији кубним сплајновима.

5.1.7.1 Кубни сплајн

Како су кубни сплајнови најчешће коришћени у пракси, детаљније ћемо их размотрити. Претпоставимо да робот треба да прође кроз n чворних тачака са координатама $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и да у њима буде у временским тренуцима $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Почетном положају робота би одговарала тачка q_1 и временски тренутак T_1 док би крајњем положају робота одговарала тачка q_n и временски тренутак T_n. При интерполацији кубним сплајном, трајекторију делимо на $n-1$ подинтервала, где трајекторију на сваком од подинтервала интерполирамо полиномом трећег степена. Полином који интерполира i-ти подинтервал има облик, на сегменту $[T_i, T_{i+1}]$, ћемо означавати са $p_i(t)$ и он је облика:

$$p_i(t) = a_i + b_i(t - T_i) + c_i(t - T_i)^2 + d_i(t - T_i)^3, \tag{5.28}$$

где су a_i, b_i, c_i и d_i коефицијенти полинома које треба одредити. Како има n чворних тачака, имаћемо $n-1$ полинома, па ће укупан број непознатих коефицијената бити $4(n-1)$.

Први услов који се мора задовољити јесте да полином пролази кроз чворне тачке. Односно за сваки полином $p_i(t)$ мора бити задовољено:

$$p_i(T_i) = q_i \tag{5.29}$$
$$p_i(T_{i+1}) = q_{i+1}. \tag{5.30}$$

Као што је већ речено, захтева се да брзина и убрзање у чворним тачкама буду непрекидни. Тиме се добијају услови који два узастопна полинома $p_i(t)$ и $p_{i+1}(t)$ морају задовољити:

$$\dot{p}_i(T_{i+1}) = \dot{p}_{i+1}(T_{i+1})$$
$$\ddot{p}_i(T_{i+1}) = \ddot{p}_{i+1}(T_{i+1}).$$

Ово практично значи да је извод полинома претходног подинтервала једнак

изводу полинома наредног подинтервала у свим чворним тачкама изузевши прву и последњу. Исто ово важи и за други извод полинома. Прва и последња се изузимају јер за њих не посотоји претходни или наредни полином. Тиме практично добијамо $n-2$ једначине за брзину и $n-2$ једначине за убрзање. Узимајући све услове у обзир добијамо укупно $4n-6$ једначина уз $4n-4$ непознатих коефицијената. Самим тиме да би могли да одредимо све коефијенте, потребна су нам још два услова. Историјски гледано, најчешће се користио *природни сплајн* код кога је убрзање у првој и последњој чворној тачки једнако нули, односно:

$$\begin{aligned} \ddot{p}_1(T_1) &= 0 \\ \ddot{p}_{n-1}(T_n) &= 0. \end{aligned}$$

Друга опција је укљештен сплајн код кога се задаје брзина у првој и последњој чворној тачки односно:

$$\dot{p}_1(T_1) = v_1 \tag{5.31}$$
$$\dot{p}_{n-1}(T_n) = v_n. \tag{5.32}$$

где су v_1 и v_n жељене брзине у првој и последњој чворној тачки. Овај случај је можда и кориснији у пракси јер уколико желимо да робот крене из мировања и заврши у мировању, онда треба користити *укљештен сплајн*, са почетном и крањном брзином једнакој нули.

Уз ове додатне услове, систем једначина је у потпуности одређен и постоји тачно једно решење.

Како би решили систем увешћемо смену $h_i = T_{i+1} - T_i$ и уврстити дефиницију полинома (5.28) у претходне услове, чиме добијамо:

$$a_i = q_i \tag{5.33}$$
$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = q_{i+1} \tag{5.34}$$
$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} \tag{5.35}$$
$$2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1}. \tag{5.36}$$

Одавде се лако одређују коефицијенти a_i који су практично једанки координатама чворних тачака. Након овога из претходног система једначина можемо елимиснијати коефицијенте a_i, и d_i и добити систем једначина са коефицијентима b_i, b_{i+1}, c_i и c_{i+1}, уз смену $\Delta q_i = q_{i+1} - q_i$:

$$b_i + \frac{h_i}{3}\left(c_{i+1} + 2c_i\right) = \frac{\Delta q_i}{h_i} \tag{5.37}$$
$$b_{i+1} = \frac{\Delta q_i}{h_i} + \frac{h_i}{3}\left(2c_{i+1} + c_i\right). \tag{5.38}$$

Променом индекса у последњој једначини, добијамо:

$$b_i = \frac{\Delta q_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{3}\left(2c_i + c_{i-1}\right). \tag{5.39}$$

И када то уврстимо у једначину (5.37), добијамо:

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2\left(h_{i-1} + h_i\right)c_i + h_i c_{i+1} = \frac{3\Delta q_i}{h_i} - \frac{3\Delta q_{i-1}}{h_{i-1}}.$$

Како су нам сви h_i и Δq_i познати, добијамо систем једначина који зависи само од коефицијената c_i Овим је добијено $n-3$ једначина, за $i = 2, 3, \ldots, n-2$. Преостале две једначине се добијају из додатхин услова.

Природни сплајн

У случају природног сплајна, када су убрзања у првој и последњој чворној тачки једнака нули, могу се добити следеће једнакости:

$$c_1 = 0$$
$$h_{n-1}c_{n-2} + 2\left(h_{n-2} + h_{n-1}\right)c_{n-1} = \frac{3\Delta q_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{3\Delta q_{n-2}}{h_{n-2}}.$$

Други израз је нешто теже добити он произилази из једнакости $p_{n-1}(T_n) = q_n$, $\ddot{p}_{n-1}(T_n) = 0$ и једначина (5.39). Уз ова два израза добија се систем $n-1$ једначина са $n-1$ непознатих коефицијената c_i који се у матричном облику може записати као:

$$\mathbf{Hc} = \mathbf{r} \tag{5.40}$$

где је:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3\Delta q_2}{h_2} - \frac{3\Delta q_1}{h_1} \\ \frac{3\Delta q_3}{h_3} - \frac{3\Delta q_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{3\Delta q_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{3\Delta q_{n-3}}{h_{n-3}} \\ \frac{3\Delta q_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{3\Delta q_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}.$$

Решавањем овогк система једначина добијају се сви коефицијенти c_i након чега је једноставно одредити и остале непознате коефицијенте b_i користећи једначине (5.39) и (5.37). Затим можемо одредити и коефицијенте d_i користећи једначине (5.36).

Наиван начин да се реши систем (5.40) јесте да се користи инверзна матрица $\mathbf{H}^{-1}$, што може бити врло неефикасно, поготово у случају великог броја чворних тачака. Међутим, лако је приметити да је ова матрица тридиагонална, па се може искористити Томасов метод за решавање тридиагоналног

система који је знатно нижекомплексности и самим тиме знатно бржи. Овај систем има једнозначно решење докле год је време монотоно растуће односно, односно ако је $T_i < T_{i+1}$ за све i.

Укљештени сплајн

Као што је већ речено, у случају укљештеног сплајна задају се вреност брзине у првој v_1 и последњој v_n чворној тачки. Комбиновањем ових услова записаним у једнакостима (5.31) и (5.32) са једначинама (5.39) и (5.37) и једнакостима за позицију и брзину последње чворне тачке, следеће једнакости:

$$2c_1h_1 + c_2h_2 = 3\left(\frac{\Delta q_1}{h_1} - v_1\right)$$

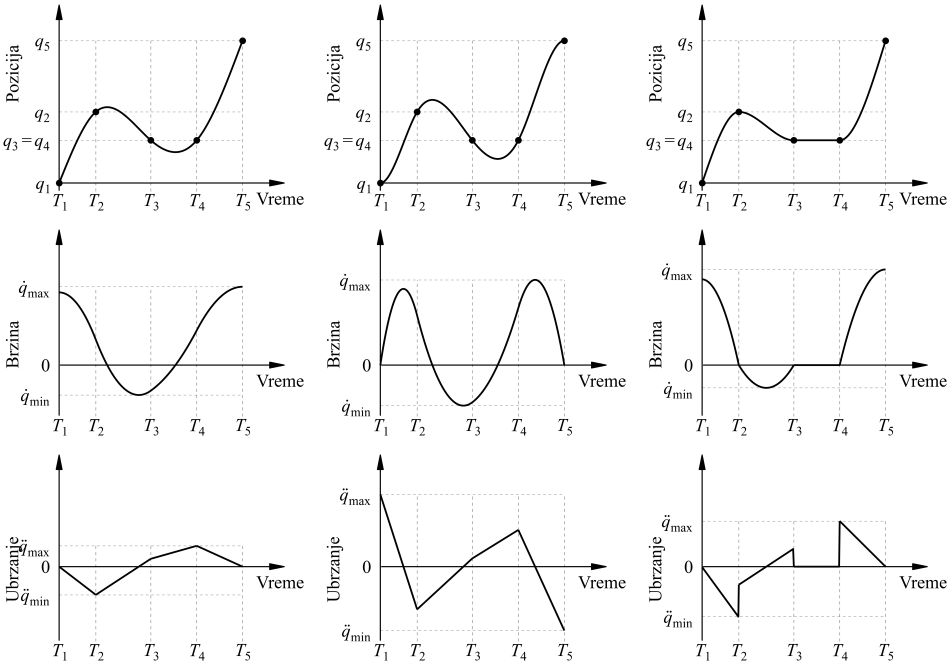
$$2c_{n-2}h_{n-2} + c_{n-1}\left(3h_{n-1} + 4h_{n-2}\right) = 9\frac{\Delta q_{n-1}}{h_{n-1}} - 3v_n - 6\frac{\Delta q_{n-2}}{h_{n-2}}.$$

Уз ове две једначине се добија поново систем врло сличан претходном, где ће се само разликовати прва и последња врста матрице $\mathbf{H}$, као и први и последњи елемент вектора $\mathbf{r}$. Нова матрица $\mathbf{H}$ и вектор $\mathbf{r}$ се могу врло лако добити на основу претходне две једначине и већ записаних облика матрице $\mathbf{H}$ и вектора $\mathbf{r}$. Битно је напоменути да је матрица $\mathbf{H}$ и даље тридиагонална, па се опет може искористити Томасов метод. На овога лако се уочава да је поступак оређивања параметара укљештеног и кубног сплајна веома сличан, где је једина разлика у конструкцији прве и последње врсте матрице $\mathbf{H}$ и вектора $\mathbf{r}$.

На слици сл. 5.6 се може видети интерполација коришћењем природног и укљештеног за исти чворне тачке, где је код укљештеног сплајна задата почетна брзина $v_1 = 0$ и крања брзина $v_n = 0$. Може се уочити да природни сплајн мање осцилује од укљештеног сплајна, али да се добија скок у брзини и убрзању у почетној и крањној тачки. Укљештени сплајн нема тај проблем и лако се може надовезати на постојеће кретањ. Међутим код њега, убрзања су знатно већа и повећана је осцилаторност кретања.

Главни недостатак кубног сплајна одређеног на јавити прескок при проласку кроз чворну тачку. То се види у случају тачке q_2 на сликама сл. 5.6а и сл. 5.6б. Овако нешто може бити опасно уколико робот ради на граници опсега зглобова и коришћење сплајна може изазвати да робот крене ван опсега што у реалним системима најчешће резултира заустављањем кретања и пријављивањем грешке. Уколико не постоји такав безбедносни механизам, може доћи до оштећења робота и околине.

Други проблем је да није могуће постићи мировање (брзина једнака нули) између чворних тачака. Чак и у случају да је координата у неколико узастопних чворних тачака једнака, интеполација сплајном ће резултирати брзинама различитим од нуле. Овај ефекат се може видети на сликама сл. 5.6а и сл. 5.6б између тачака q_3 и q_4, које имају исту вредност.



(а) Природни сплајн *(б) Укљештени сплајн* *(в) ПЧИП интерполација*

Слика 5.6: Позиција, брзина и убрзање при интерполацији истих чворних тачака природним сплајном, укљештеним сплајном и ПЧИП интерполацијом

5.1.7.2 Сплајн који очувава облик

Проблеми са природним и укљештеним кубним спљановима се не могу превазићи, те је за превазилажење прескока и немогућности мировања потребан другачији приступ. Један од њих је сплајн који очувава облик и монотоност функције који се назива ПЧИП (енгл. *Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial*, скраћено *PCHIP*). Основна идеја јесте да се одреде вредности брзине у чворним тачкама тако да се очува монотоност функције и да се на основу тога за сваки сегмент интерполира полиномом трећег степена на основу почетне и крајње позиције и брзине као што је рађено у поглављу 5.1.3.

Прво би се за сваки сегмент рачунала промена δ_i, која преставља средњу брзину на интервалу $[T_i, T_{i+1}]$ као:

$$\delta_i = \frac{q_{i+1} - q_i}{T_{i+1} - T_i} = \frac{\Delta q_i}{h_i}.$$

Након тога се посматрају две средње брзине δ_{i-1} и δ_i око чворне тачке i. На основу њихових вредности се рачуна вредност брзине за чворну тачку i као:

$$v_i = \begin{cases} 0 & \delta_{i-1} \cdot \delta_i \leq 0 \\ \frac{w_1+w_2}{\frac{w_1}{\delta_{i-1}}+\frac{w_2}{\delta_i}} & \delta_{i-1} \cdot \delta_i > 0 \end{cases}$$

где су w_1 и w_2 тежине које се рачунају као:

$$w_1 = h_{k-1} + 2h_k,$$
$$w_2 = 2h_{k-1} + h_{k+1}.$$

Ово значи да ако средње брзине имају супротан знак, или је једна од њих једнака нули, онда се вредност брзине у чворној тачки i поставља на нулу како би се избегао прескок. Ако су обе средње брзине обе позитивне или обе негативне, брзина у чворној тачки се рачуна као пондерисана хармонијска средина средњих брзина δ_{i-1} и δ_i.

Што сте тиче почетне и крајње брзине она се одређује на основу кандидата за вредност брзине, који је за почетну тачку q_0 кандидат за вредност брзине v_0 једнак 0, а за крајњу тачку q_n кандидат за вредност брзине v_n једнак 0.

$$d = ((2h_1 + h_2) * \delta_1 - h_1\delta_2)/(h_1 + h_2).$$

На основу овог кандидата и знакова средњих брзина одређује се вредност брзине за почетну тачку v_1 као:

$$v_1 = \begin{cases} 0 & d \cdot \delta_1 \leq 0 \\ 3\delta_1 & d \cdot \delta_1 > 0 \text{ и } \delta_1 \cdot \delta_2 \leq 0 \text{ и } |d| \geq 3\,|\delta_1| \\ d & \text{иначе} \end{cases}$$

На сличан начин се одређује брзина и за крајњу тачку. Заменом индекса у предходне две једнакости, где би уместо 1 стојало n и уместо 2 стојало $n-1$, се добија израз за израчунавање вредности брзине за крајњу тачку v_n. Овим смо одредили вредности брзина у свим тачкама на основу чега се могу одредити полиноми трећег степена за сваки сегмент.

Резултат ПЧИП интерполације је приказан на слици 5.6в, где се може уочити да више прескок не постоји и да се остварује мировање у интервалу између треће и четврте чворне тачке. Тиме су превазиђени проблеми уочени код природног и укљештеног кубног сплајна. Нажалост, да би то постигли изгубили смо континуитет другог извода, односно убрзања, што се лако може уочити са доњег дијаграма на слици 5.6в.

5.2 ПЛАНИРАЊЕ ЦП КРЕТАЊА

Као што је већ речено, под ЦП кретањем се подразумева континуално кретање врха робота дуж путање, односно кретање где је у сваком тренутку важно где се на трајекторији налази врх робота. Имајући у виду да се спецификација задатка од стране технолога увек добија у спољашњим координатама природно је планирање оваквог кретања обављати у простору спољашњих координата.

Планирање ЦП кретања је сложеније у односу на планирање ПТП кретања из више разлога. Најпре, код ПТП кретања, трајекторије које нису

биле стриктно прописане биране су тако да интерполационе функције буду једноставне. Овде то није могуће. Путања може бити произвољног степена сложености у зависности од типа задатка који робот обавља, па према томе и трајекторија може имати сложену зависност захтеваног положаја и времена током покрета. Даље, као што ћемо видети у наредном поглављу, за реализацију кретања дуж трајекторија је увек потребна информација о кретању зглобова. То значи да се проблем инверзне кинематике мора решити практично за сваку тачку трајекторије, што је сложен, рачунски захтеван, па самим тим и дуготрајан процес. Стога је потребно да се размотре другачији начини решавања овог задатка.

Један приступ синтези ЦП кретања је да се трајекторија зада као скуп блиских чворних тачака кроз које врх робота треба да прође, а да се затим између њих интерполацијом одреде додатне тачке. Овакав приступ не разликује се значајно од до сада изложених поступака за синтезу ПТП трајекторија, осим што је, у општем случају, потребно много више чворних тачака. Интерполација сплајновима може се и у овом случају показати као врло добро и применљиво решење.

Размотрићемо и другачији приступ, а то је аналитичко задавање трајекторија врха робота. Као што је већ речено, у најопштијем случају, позиција и оријентација врха робота у простору могу бити описани са шест независних величина, односно вектором

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{3\times 1} \\ \mathbf{o}_{3\times 1} \end{bmatrix}_{6\times 1}, \tag{5.41}$$

где $\mathbf{p}$ представља подвектор који садржи три координате позиције врха робота у простору, док $\mathbf{o}$ представља подвектор који садржи три координате којима се специфицира оријентација хватаљке.

У специфичним случајевима, вектор $\mathbf{r}$ може имати и димензију мању од шест, као на пример, када није потребно потпуно специфицирати оријентацију, или оријентација уопште није од интереса, итд. У тексту који следи ћемо размотрити општи случај, а проблем синтезе трајекторије раздвојићемо на одвојене проблеме дефинисања позиције и задавања оријентације, које ћемо засебно изучити.

5.2.1 Параметризовано задавање позиције у простору

Када се ради о дефинисању позиције у простору, тада се вектор позиције врха робота најчешће задаје са три координате у правоуглом декартовом координатном систему, тј.

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

где су x, y и z координате жељене позиције врха изражене у односу на референтни координатни систем. Могуће је наравно применити и друге врсте координатних система, на пример, поларноцилиндрични, или сферни координатни систем, али су декартове координате најјасније и интуитивно најлакше за рад, па се због тога најчешће и користе.

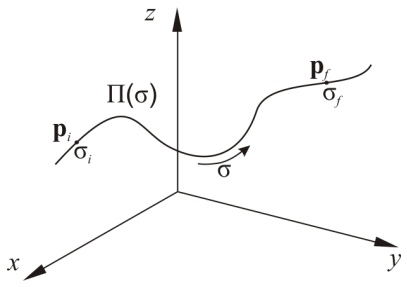
Имајући у виду да желимо да синтетизујемо трајекторије у простору аналитичким путем, најпре морамо пронаћи аналитички израз за путању хватаљке (или алата који робот носи, нпр. уређаја за заваривање) у простору. Приметимо да је путања (обележимо је са П) заправо континуални скуп тачака у простору који одговарају некој линији у простору. П је заправо једнодимензионални скуп, па се може пронаћи параметар σ, тако да путања буде описана са

$$\mathbf{p} = \prod(\sigma),$$

односно,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\sigma) \\ y(\sigma) \\ z(\sigma) \end{bmatrix},$$

где је σ геометријски параметар који описује путању (сл. 5.7). Почетна тачка путање $\mathbf{p}_i$ одређена је почетном вредношћу параметра σ_i, док је крајња тачка путање $\mathbf{p}_f$ одређена крајњом вредношћу парметра σ_f. Путања може бити и затворена, када је $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$, или отворена, као што је то случај на сл. 5.7.



Слика 5.7: Параметарска дефиниција путање у простору

Промена параметра σ, од почетне вредности σ_i до крајње вредности σ_f у потпуности дефинише положај врха робота дуж путање. Ако параметру σ, односно његовој промени, придружимо и временску зависност $\sigma = \sigma(t)$, тада је у потпуности дефинисана и трајекторија врха робота. Функционална зависност $\sigma = \sigma(t)$ се дефинише пресликавањем временског интервала $[T_i, T_f]$ за који треба обавити кретање дуж путање, на интервал промене геометријског параметра који дефинише путању од почетне до крајње тачке:

$$[T_i, T_f] \xrightarrow[\sigma=\sigma(t)]{} [\sigma_i, \sigma_f].$$

При томе, величина временског интервала утиче на брзину кретања, односно, краћи временски интервал значи брже кретање, и обрнуто, док облик фукнције $\sigma(t)$ дефинише профил кретања.

За профил кретања $\sigma(t)$ можемо искористити неку од функција које смо већ разматрали код синтезе ПТП кретања: трапезни или троугаони профил брзине, полиномне интерполације одговарајућег степена, итд.

На овај начин, проблем синтезе трајекторије решава се у два корака. У првом је потребно одредити изразе за параметризовану трајекторију у

простору, док се у другом кораку геометријском параметру придружује жељени временски профил.

Размотримо сада природу геометријског параметра σ. Већ је речено да он одређује положај тачке дуж путање Π, односно, дуж криве у простору. Подсетимо да крива у простору може бити задата експилицитно својим једначинама, или као пресек двеју површи. У сваком случају, увек постоји могућност да се путања параметризује. Од свих параметара којима је могуће описати путању, као најважнија се издваја криволинијска координата s, дефинисана као пређени пут, или дужина лука криве од неке тачке усвојене за координатни почетак, до посматране тачке.

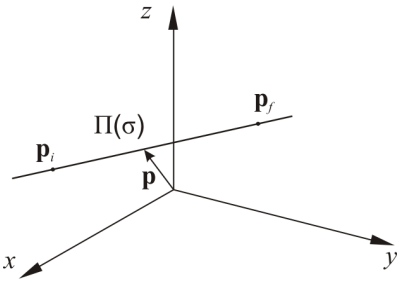
Криволинијска координата s најчешће се дефинише преко свог диференцијалног прираштаја

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \tag{5.42}$$

где су dx, dy и dz диференцијални прираштаји криве дуж координатних оса.

Код једноставнијих путања, криволинијска координата s се природно намеће као најподеснија величина за параметризацију. Код комплексних путања, криволинијска координата може бити сложена функција, па се као параметар усваја нека друга, погодна величина.

Размотримо сада неколико примера одређивања параметризованих путања. Најпре ћемо анализирати кретање по правој линији у простору (јер је тај случај најједноставнији), као што је приказано на сл. 5.8.



Слика 5.8: Путања у облику праве линије у простору

Подсетимо се да се аналитички права у простору, која пролази кроз две тачке задате векторима $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}_f$ може дефинисати као

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_i = \sigma\left(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\right), \tag{5.43}$$

где једначина изражава чињеницу да вектор повучен из почетне тачке $\mathbf{p}_i$ до било које тачке на правој $\mathbf{p}$, мора бити колинеаран вектору између тачака $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}_f$, при чему је σ параметер којим се одређује положај тачке п на задатој правој. Једначина (5.43) се може преформулистати тако да одмах добијемо параметризовану путању облика

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_i + \sigma(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i), \tag{5.44}$$

или, развијено по координатама

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i + \sigma(x_f - x_i) \\ y_i + \sigma(y_f - y_i) \\ z_i + \sigma(z_f - z_i) \end{bmatrix}.$$

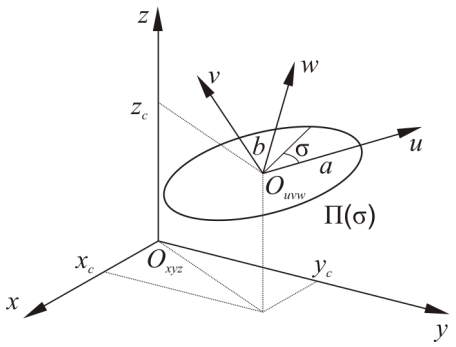
Услов да се врх робота креће по правој линији од почетне тачке $\mathbf{p}_i$ до крајње тачке $\mathbf{p}_f$ је испуњен ако се параметар σ мења у интервалу $[0, 1]$.

Приметимо да у овом случају, параметар σ који је уведен као чисто геометријски параметар, има природу криволинијске координате s. Заиста, имајући у виду релацију (5.42), и одређивањем диференцијала израза (5.44), добијамо

$$ds = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2 + (z_f - z_i)^2} \cdot d\sigma,$$

односно, пираштај криволинијске коодинате, или пређеног пута s, пропорционалан је пираштају геометријског параметра σ. Да би проблем синтезе трајекторије био у потпуности решен, преостаје нам само да изаберемо временску зависност, односно профил промене $\sigma(t)$. Као што је већ речено, за ову сврху можемо искористити неки од већ поменутих профила брзине нпр. трапезни.

Размотримо сада проблем синтезе трајекторије у случају да желимо да се врх робота креће у простору по елипси (сл. 5.9). С обзиром да је елипса раванска крива, проблем одређивања параметарске репрезентације путање решићемо најпре у равни која садржи елипсу, а затим њему ту раван ротирати и транслирати у простору на жељени начин.



Слика 5.9: Путања облика елипсе у простору

Прво ћемо одредити једначину елипсе у параметарској форми у равни у којој се елипса налази. Означимо са u, v и w осе координатног система O_{uvw}, тако да се његов координатни почетак поклапа са центром елипсе, а осе u и v одређују раван у којој елипса лежи. Ако су полуосе елипсе обележене са a и b, тада се једначина елипсе може написати као:

$$\mathbf{p}_{uvw} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos(\sigma) \\ b\sin(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix},$$

где је σ параметар који променом у опсегу $\sigma \in [0, 2\pi]$ описује целу елипсу.

Поставимо елипсу тако да јој се центар O налази у тачки чије су координате дате са $\mathbf{p}_c = [x_c, y_c, z_c]^T$, док је је нагиб равни у односу на референтни координатни систем специфициран матрицом ротације $\mathbf{R}$. У том случају је почетак коодинатног система O_{uvw} (који је везан за елипсу) транслиран, а његове осе ротиране у односу на осе референтног система O_{xyz}. Тада се веза између координатних система O_{xyz} и O_{uvw}, може успоставити преко матрице хомогене трансформације или у развијеној фоми

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_c + \mathbf{R} \cdot \mathbf{p}_{uvw},$$

где је $\mathbf{p}_c = [x_c, y_c, z_c]^T$ положај центра координатног система O_{uvw}, односно центра елипсе у односу на референтни координатни систем O_{xyz}, а

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

представља матрицу ротације која изражава везу између оријентације оса везаног и референтног координатног система. Приметимо да су вектор $\mathbf{p}_c$ и матрица $\mathbf{R}$ константни.

Параметарска једначина елипсе у простору се сада може изразити као

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c + r_{11} a \cos(\sigma) + r_{12} b \sin(\sigma) \\ y_c + r_{21} a \cos(\sigma) + r_{22} b \sin(\sigma) \\ z_c + r_{31} a \cos(\sigma) + r_{32} b \sin(\sigma) \end{bmatrix},$$

што заједно са профилом промене параметра $\sigma(t)$ одређује трајекторију у простору. Приметимо да у овом случају параметар σ има геометријски смисао који се не може лако повезати са криволинијском координатом s. Да бисмо се у то уверили, потражимо диференцијалне прираштаје координата дуж путање и искористимо израз за прираштај криволинијске координате (5.42). При томе, треба имати у виду да су коефицијенти r_{ij} елементи матрице ротације. За матрицу ротације $\mathbf{R}$ знамо да су њене колоне, односно врсте заправо пројекције јединичних вектора ротираног и референтног координатног система. Такође важи и да су колоне матрице узајамно ортогоналне, а ортогоналност важи и за врсте. Применом ових особина добија се израз

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2(\sigma) + b^2 \cos^2(\sigma)} \cdot d\sigma.$$

Из добијеног израза видимо да постоји сложена веза између геометријског параметра σ и криволинијске координате s.

На овом примеру можемо уочити да је параметризацију путање готово увек могуће реализовати на интуитиван начин, мада у неким случајевима веза усвојеног параметра са криволинијском координатом може бити и веома сложена. Приметимо да у случају кретања по кружници важи

$$a = b = r,$$

а прираштај криволинијске координате је

$$ds = \sqrt{r^2\cos^2(\sigma) + r^2\sin^2(\sigma)} \cdot d\sigma = r \cdot d\sigma.$$

На начин сличан претходим примерима, могли бисмо да параметризујемо практично било коју просторну путању, а затим усвајањем временске промене параметра, да решимо и проблем синтезе трајекторије, односно позиције врха робота у простору. Да би смо потпуно дефинисали кретање врха робота, преостаје нам још да размотримо начин задавања оријентације врха робота у простору.

5.2.2 Дефинисање оријентације врха робота у простору

Оријентација врха робота у простору у потпуности је одређена са три независна параметра, које смо у изразу (5.41) груписали у вектор $\mathbf{o}_{3\times1}$. У ранијим поглављима смо видели да постоје различити начини за дефинисање оријентације, на пример, коришћењем Ојлерових углова ZYZ, односно ZYX типа, или углова скретања, пропињања и ваљања. Према томе, у општем случају вектор који дефинише оријентацију врха робота можемо записати у облику

$$\mathbf{o} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix},$$

без обзира на природу углова ϕ, θ и ψ . Да би се дефинисала оријентација врха робота током кретања дуж трајекторије, потребно је одредити вредности углова којима се задаје оријентација током времена. Као и у случају позиције, то се може извести у два корака, тако што се најпре одреди параметризована репрезентација углова оријентације, а затим се параметру додели временска зависност.

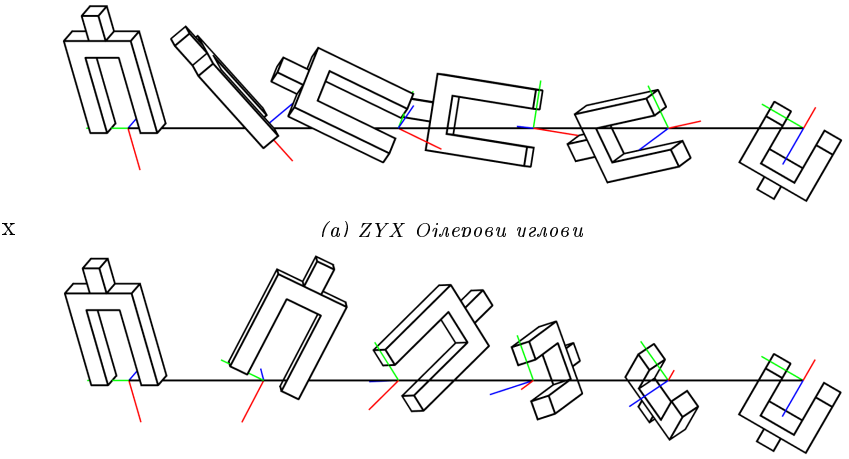
У једноставнијим случајевима планирања оријентације врха робота је од интереса само оријентација врха у почетној, односно крајњој тачки трајекторије, док оријентација дуж трајекторије није од интереса. Тада можемо приступити интерполацији углова оријентације на следећи начин. Нека је оријентација задата са:

$$\mathbf{o} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_i + (\phi_f - \phi_i)\sigma \\ \theta_i + (\theta_f - \theta_i)\sigma \\ \psi_i + (\psi_f - \psi_i)\sigma \end{bmatrix},$$

где смо индексом u означили вредности углова оријентације у почетној, а индексом ϕ у крајњој тачки путање. Параметар σ мења се у интервалу $[0, 1]$. Дефинисањем временске зависности параметра σ, задатак синтезе оријентације врха робота дуж трајекторије је решен. За одређвање временске зависности параметра σ могу се користити неке од раније наведених медота.

Пример интерполације оријентације коришћењем Ојлерових углова је дат на слици сл. 5.10, где је лако уочити један од проблема оваквог приступа. Лако се уочава да промена оријентације није минимална, већ се јавља сувишна ротација око вертикалне осе у овом случају. Поред тога, трајекторија зависи од типа Ојлерових углова одабраних за репрезентацију. Ово је последица

чињенице да простор орјентација није вектроски и врло је нелинеаран. Уз то, Ојлерови углови који одговарају задатој матрици ротације нису једнозначни, што додатно може закомпликовати процес интерполације.



(а) ZYX Ојлерови углови

(б) ZYZ Ојлерови углови

Слика 5.10: Интерполација оријентације коришћењем Ојлерових углова. Приказане су почетна (скроз лево) крајња (скроз десно) и четири интерполиране вредности

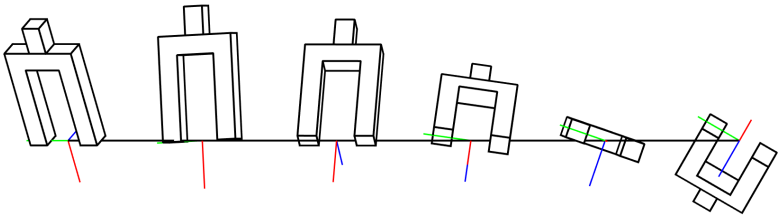
5.2.2.1 Интерполација углова помоћу кватерниона

Како би се превазишао претходни проблем и како би извршили интерполацију између оријентација задатих матрицама ротације $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_B$ прво ћемо искористити репрезентацију оријентације помоћу осе и угла ротације. Прво је потребно одредити релативну матрицу ротације $\mathbf{R}_A^B = \mathbf{R}_A^T\mathbf{R}_B$, након чега се на основу израз (3.36) и (3.37) одређује еквивалентнан угао θ_A^B и оса ротације $\mathbf{t}_A^B$. На основу тога можемо извршити интерполацију матрица оријентације коришћењем:

$$\mathbf{R}(\sigma) = \mathbf{R}_A\mathbf{R}_A\mathbf{R}_{\mathbf{t}_A^B,\sigma\theta_A^B}, \tag{5.45}$$

где матрица $\mathbf{R}_A\mathbf{R}_{\mathbf{t}_A^B,\sigma\theta_A^B}$ представља матрицу ротације око осе $\mathbf{t}_A^B$ за угао $\sigma\theta_A^B$. Ова матрица је задата изразом (3.28). Као и у претходном случају σ се мења у интервалу $[0,1]$ и лако је показати да је $\mathbf{R}_A = \mathbf{R}(\sigma)|_{\sigma=0}$ и $\mathbf{R}_B = \mathbf{R}(\sigma)|_{\sigma=1}$ Резултат апроксимације овом методом је дат на сл. 5.11, и одма се запажа да је ротација знатно мања него у претходном случају.

Како су кватерниони и репрезентација путем угла и осе ротације врло блиски, за претходно задати поступак постоји операција у простору кватерниона која се назива „Сферна линеарна интерполација" или срађено „Слерп". Уколико кватернион $\mathbf{q}_A$ одговара матрици ротације $\mathbf{R}_A$ и кватернион $\mathbf{q}_B$



Слика 5.11: Интерполација оријентације коришћењем кватерниона или репрезентације помоћу осе и угла

одговара матрици ротације $\boldsymbol{R}_B$ онда се интерполација врши помоћу:

$$\mathbf{q}(\sigma) = \text{Slerp}(\mathbf{q}_A, \mathbf{q}_B, \sigma) = \frac{\sin\left((1-\sigma)\,\theta_A^B\right)}{\sin\theta_A^B}\mathbf{q}_A + \frac{\sin\left(\sigma\theta_A^B\right)}{\sin\theta_A^B}\mathbf{q}_B$$

Кватернион $\mathbf{q}(\sigma)$ одговара ротацији задатој матрицом $\mathbf{R}(\sigma)$ из једначине (5.45). Угао θ_A^B се такође може одредити само на основу кватерниона, коришћењем израза:

$$\cos\frac{\theta_A^B}{2} = q_{Aw}q_{Bw} + q_{Ax}q_{Bx} + q_{Ay}q_{By} + q_{Az}q_{Bz}$$

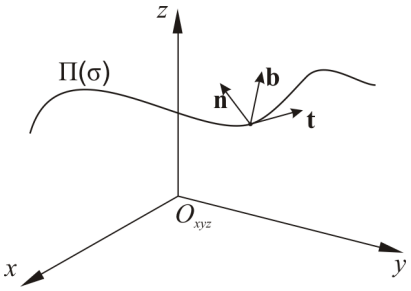
који произилази из везе кватерниона и репрезентације помоћу осе и угла ротације (3.46), (3.47). Наравно, коришћењем овог начина интерполације добија се потпуно исти резултат како и када користимо осу и угао (сл. 5.11). Како се кватерниони све учесталије користе у свету роботике, ова метода се усталила као најбоља за интерполацију

5.2.2.2 Оријентација зависна од облика трајекторије

Врло често, Уколико позиција врха робота треба да прати неку путању у простору, која следи из технолошких захтева. На пример, код електролучног заваривања, путања врха електроде треба да прати шав који се завариује, а при томе електрода треба сво време да буде у равни која је управна на раван шава. Слично је и код роботизованог бојења прскањем, где путања врха зависи од површине која се боји, а оријентација алата за бојење треба да је таква да је млаз боје ортогоналан на бојену површину.

Према томе, наш задатак је да сада, на основу параметризоване путање врха робота у простору, одредимо податке који дефинишу оријентацију. Присетимо се да се свакој тачки просторне криве могу придружити три ортогонална јединична вектора као на сл. 5.12.

Три вектора са сл. 5.12 (вектори тангенте $\mathbf{t}$, нормале $\mathbf{n}$ и бинормале $\mathbf{b}$) формирају такозвани природни триедар криве, односно координатни систем десне оријентације. Вектор тангенте дефинише правац тангенте у датој тачки просторне криве. Вектор нормале ортогоналан је на правац тангенте и усмерен је ка центру кривине криве. Коначно, вектор бинормале ортогоналан је на оба претходна вектора.



Слика 5.12: Просторна крива и природни триедар у једној тачки криве

Ако је просторна крива задата параметарски тако да је параметар криволинијска координата s,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(s),$$

тада се јединични вектори природног триедра могу одредити на следећи начин

$$\mathbf{t} = \mathbf{p}' = \frac{d\mathbf{p}}{ds}, \tag{5.46}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}''}{|\mathbf{p}''|}, \tag{5.47}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}' \times \mathbf{p}''}{|\mathbf{p}' \times \mathbf{p}''|}, \tag{5.48}$$

при чему се диференцирање врши по криволинијској координати s. Ако је просторна крива задата по неком другом, геометријском параметру σ, тада изрази за јединичне векторе природног триедра постају нешто сложенији:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{p}'(\sigma)}{|\mathbf{p}'(\sigma)|}, \tag{5.49}$$

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{p}'(\sigma) \times \mathbf{p}''(\sigma)) \times \mathbf{p}'(\sigma)}{|(\mathbf{p}'(\sigma) \times \mathbf{p}''(\sigma)) \times \mathbf{p}'(\sigma)|}, \tag{5.50}$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{p}'(\sigma) \times \mathbf{p}''(\sigma)}{|\mathbf{p}'(\sigma) \times \mathbf{p}''(\sigma)|}, \tag{5.51}$$

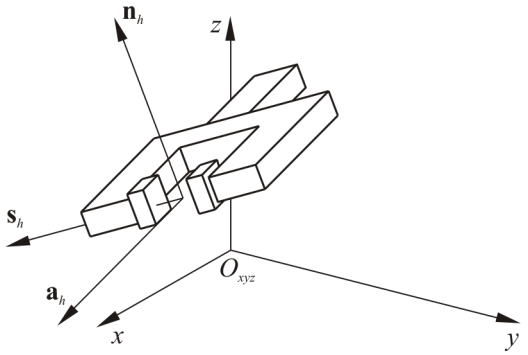
при чему се диференцирање врши по параметру σ.

Јединичне векторе природног триедра можемо искористити за задавање оријентације врха робота на следећи начин. Подестимо се најпре, да смо код разматрања кинематике робота увели матрице хомогених трансформација, којом можемо изразити положај и оријентацију врха робота, као

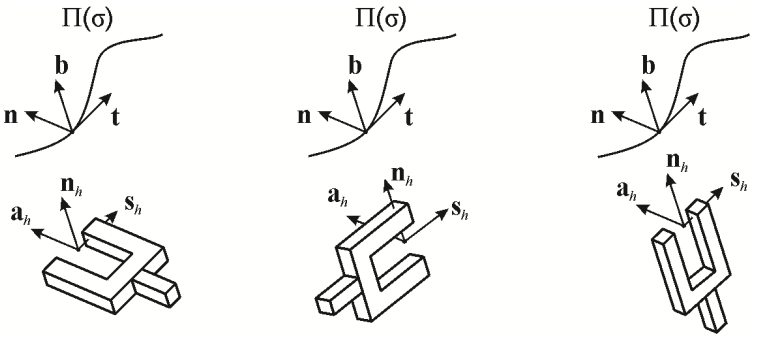
$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{n}_h & \mathbf{s}_h & \mathbf{a}_h & \mathbf{p}_h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

где вектори $\mathbf{n}_h$, $\mathbf{s}_h$ и $\mathbf{a}_h$ представљају пројекције јединичних вектора оса

координатног система везаног за хватаљку[2] на осе референтног система, а вектор $\mathbf{p}_h$ означава позицију врха робота. Јединични вектори координатног система хватаљке приказани су на сл. 5.13.



Слика 5.13: Јединични вектори координатног система хватаљке



Слика 5.14: Различите оријентације хватаљке дуж путање у простору

Задавање оријентације хватаљке своди се на успостављање везе између оса координатног система хватаљке и природног триедра путање. Неке од оријентација хватаљке у односу на путању су илустроване на сл. 5.14.

На слици су приказани само случајеви када су осе везаног координатног система хватаљке паралелне осама природног триедра у посматраној тачки путање. У општем случају, веза између координатног система хватаљке и природног триедра зависи од природе задатка и од начина на који је дефинисан координатни систем хватаљке. Та веза може бити представљена као

$$[\mathbf{n}_h \mid \mathbf{s}_h \mid \mathbf{a}_h] = [\mathbf{t} \mid \mathbf{n} \mid \mathbf{b}] \cdot \mathbf{R}_h, \tag{5.52}$$

[2] У литератури се веома често осе координатног система који се веже за хватаљку означавају са **n**, **s** и **a**. При томе **n** означава правац који је управан на хватаљку, **s** правац отварања хватаљке (од енгл. речи *слидинг*) док **a** означава правац примицања хватаљке објекту (од енгл. речи *аппроацх*).

при чему је $\mathbf{R}_h$ константна матрица ротације. На пример, за оријентације хватаљке са сл. 5.14, матрице ротације, с лева на десно, су

$$\mathbf{R}_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_h = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Имајући у виду да се јединични вектори природног триедра могу одредити из израза (5.46), (5.47) и (5.48) односно (5.49), (5.50) и (5.51), у потпуности је одређена оријентација врха хватаљке дуж путање. Када се параметру σ придружи и временска зависност, оријентација хватаљке дуж трајекторије је у потпуности дефинисана.

Илуструјмо описани концепт дефинисања оријентације врха робота дуж путање примером. За почетак, размотрићемо једноставну путању облика кружнице која је задата параметарским једначинама

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_c + r\cos(\sigma) \\ z_c + r\sin(\sigma) \end{bmatrix}, \tag{5.53}$$

из којих закључујемо да кружница лежи у yz равни, да се њен центар налази се у тачки $[0, y_c, z_c]^T$, и да има полупречник r. Параметар σ има природу угла, и својом променом на интервалу $\sigma \in [0, 2\pi]$ дефинише целу кружницу.

Да бисмо одредили једначине јединичних оса природног триедра, диференцирајмо најпре параметарску једначину (5.53) два пута, чиме се добија

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} 0 \\ -r\sin(\sigma) \\ r\cos(\sigma) \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{p}'| = \mathbf{r}, \tag{5.54}$$

односно,

$$\mathbf{p}'' = \begin{bmatrix} 0 \\ -r\cos(\sigma) \\ -r\sin(\sigma) \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{p}''| = \mathbf{r}. \tag{5.55}$$

Сменом израза (5.54) у (5.49) можемо одредити једначину јединичног вектора тангенте

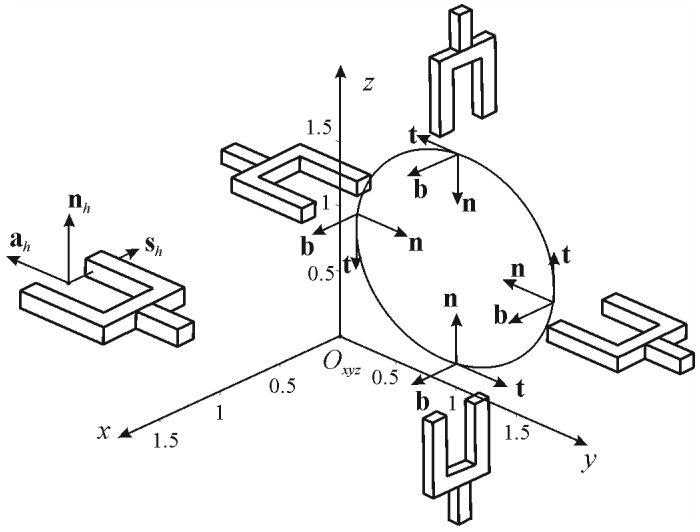
$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\sigma) & \cos(\sigma) \end{bmatrix}^T.$$

Слично, сменом израза (5.54) и (5.55) у једначину јединичног вектора бинормале (5.51) добијамо

$$\mathbf{b} = [1 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Видимо да је једнични вектор бинормале константан, и паралелан x оси, што је потпуно очекивано, имајући у виду да задата кружница лежи у yz равни.

Коначно, јединични вектор нормале може се одредити на основу израза (5.47). У овом примеру, због кретања по кружници, вектор нормале има исти



Слика 5.15: Путања у облику кружнице и оријентација хватаљке дуж путање

правац као и вектор $\mathbf{p}''$, па се може одредити и као

$$\vec{n} = \frac{\vec{p}''}{|\vec{p}''|} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos(\sigma) & -\sin(\sigma) \end{bmatrix}^T.$$

Изглед кружнице у простору, као и оријентације природних триедара у неколико тачака на кружници приказане су на сл. 5.15.

Кружница на сл. 5.15 је приказана за вредности параметара $r = 0.8$, $x_c = 0$, $y_c = 1$, и $z_c = 1$, а природни триедри приказани су у тачкама у којима параметар σ има вредности $0, \pi/2, \pi$ и $3\pi/2$. На слици је такође дефинисан координатни систем везан за хватаљку робота, као и жељена оријентација хватаљке током реализације кретања. Са сл. 5.15 можемо уочити везу између оријентације координатног система хватаљке и природног триедра

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_h &= \mathbf{t}, \\ \mathbf{s}_h &= -\mathbf{b}, \\ \mathbf{a}_h &= \mathbf{n}, \end{aligned}$$

која се може изразити и преко матрице ротације $\mathbf{R}_h$, дефинисане једначином (5.52), при чему је

$$\mathbf{R}_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

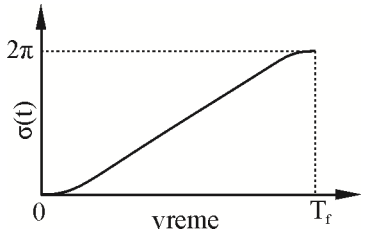
Према томе, оријентација врха робота дуж путање одређена је ротационом матрицом

$$\mathbf{R} = [\mathbf{n}_h \mid \mathbf{s}_h \mid \mathbf{a}_h] = [\mathbf{t} \mid \mathbf{n} \mid \mathbf{b}] \cdot \mathbf{R}_h, \tag{5.56}$$

Где је матрица ротације дата са

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\sin(\sigma) & 0 & -\cos(\sigma) \\ \cos(\sigma) & 0 & -\sin(\sigma) \end{bmatrix}. \tag{5.57}$$

Избором временске зависности $\sigma = \sigma(t)$, односно профила кретања, изразом (5.53) у потпуности је одређена трајекторија врха робота у простору, док је оријентација врха робота дуж трајекторије одређена изразом (5.57). Примера ради, у случају када има природу угла, да би се врх робота кретао по некој путањи трапезним профилом брзине потребно је да временска зависност $\sigma = \sigma(t)$ изгледа као на сл. 5.16. Уочимо да је, у случају трапезног профила брзине врха робота, промена параметра σ једнака промени позиције у зглобу робота као што је приказано на сл. 5.2.



Слика 5.16: Временска зависност параметра σ

Размотримо сада један комплекснији пример за дефинисање оријентације врха хватаљке дуж параметризоване путање. Нека је сада задатак да се врх робота креће дуж хеликоиде, односно спиралне завојнице задате параметарским једначинама

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + r\cos(\sigma) \\ y_0 + r\sin(\sigma) \\ z_0 + \frac{1}{2\pi} h\sigma \end{bmatrix} \tag{5.58}$$

где је r полупречник цилиндра на који је завојница намотана, а h корак завојнице, док x_0 и y_0 одређују положај осе хеликоиде (центар основе цилиндра на који је завојница намотана), а z_0 означава висину почетне тачке завојнице. Оса завојнице паралелна је з оси референтног координатног система. Параметар σ својом променом дефинише завојницу, при чему промена од 2π дефинише корак хеликоиде.

Применимо сада једначине (5.49), (5.50) и (5.51) да би смо одредили јединичне векторе природног триедра. Одредимо најпре први и други извод

вектора позиције по параметру σ

$$\mathbf{p}'(\sigma) = \begin{bmatrix} -r\sin(\sigma) \\ r\cos(\sigma) \\ \frac{1}{2\pi}h \end{bmatrix}, |\mathbf{p}'| = \sqrt{r^2 + \frac{1}{4\pi^2}h^2}, \tag{5.59}$$

$$\mathbf{p}''(\sigma) = \begin{bmatrix} -r\cos(\sigma) \\ -r\sin(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.60}$$

а затим и потребне векторске производе

$$\mathbf{p}'(\sigma) \times \mathbf{p}''(\sigma) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi}hr\sin(\sigma) \\ -\frac{1}{2\pi}hr\cos(\sigma) \\ r^2 \end{bmatrix},$$

односно

$$(\mathbf{p}'(\sigma) \times \mathbf{p}''(\sigma)) \times \mathbf{p}'(\sigma) = \left(r^2 + \frac{1}{4\pi^2}h^2\right) \cdot r \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\sigma) \\ -\sin(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Сада можемо срачунати елементе израза (5.49), (5.50) и (5.51) ради одређивања јединичних векторе природног триедра путање

$$|\mathbf{p}' \times \mathbf{p}''| = \sqrt{r^2 + \frac{1}{4\pi^2}h^2} \cdot r, \tag{5.61}$$

$$|(\mathbf{p}' \times \mathbf{p}'') \times \mathbf{p}''| = r\left(r^2 + \frac{1}{4\pi^2}h^2\right). \tag{5.62}$$

Да бисмо поједноставили изразе који следе, уведимо смену

$$c = \sqrt{r^2 + \frac{1}{4\pi^2}h^2}.$$

Сменом добијених израза у једначине за једничне векторе природног триедра криве (5.49), (5.50) и (5.51) добијамо

$$\mathbf{t} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} -r\sin\sigma \\ r\cos\sigma \\ \frac{1}{2\pi}h \end{bmatrix}, \tag{5.63}$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\cos\sigma \\ -\sin\sigma \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.64}$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi}h\sin(\sigma) \\ -\frac{1}{2\pi}h\cos(\sigma) \\ r \end{bmatrix}. \tag{5.65}$$

Преостаје још да успоставимо везу између оријентације координантног система хватаљке и природног триедра. Нека је задатак робота да се јединични вектори два координатна система поклапају, односно да је ротациона матрица

$$\mathbf{R}_h = \mathbf{I}_{3\times 3},$$

заправо јединична матрица. Другим речима, важи да је

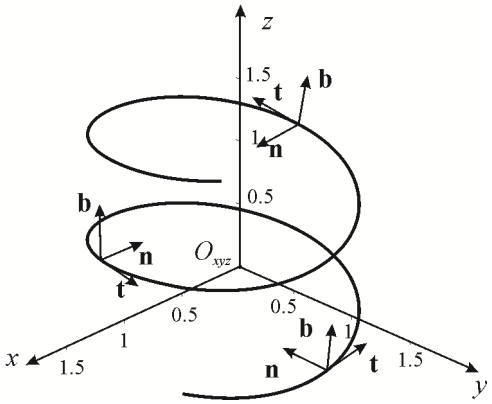
$$\begin{aligned}\mathbf{n}_h &= \mathbf{t},\\ \mathbf{s}_h &= \mathbf{n},\\ \mathbf{a}_h &= \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Тада је ротациона матрица која дефинише оријентацију врха робота дуж путање дата са

$$\mathbf{R} = [\mathbf{n}_h \quad \mathbf{s}_h \quad \mathbf{a}_h] = [\mathbf{t} \quad \mathbf{n} \quad \mathbf{b}]\,,$$

односно,

$$\mathbf{R} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} -r\sin(\sigma) & -c\cos(\sigma) & \frac{1}{2\pi}h\sin(\sigma) \\ r\cos(\sigma) & -c\sin(\sigma) & -\frac{1}{2\pi}h\cos(\sigma) \\ \frac{1}{2\pi}h & 0 & r \end{bmatrix}. \tag{5.66}$$



Слика 5.17: Путања облика хеликоиде и природни триедри у неколико тачака дуж путање

Да закључимо, једначина (5.58) представља једначину путање врха робота, док једначина (5.66) одређује оријентацију врха робота дуж путање на жељени начин. Ове две једначине, заједно са профилом промене параметра σ у потпуности одређују трајекторију по којој се врх робота креће, односно, једнозначно је дефинисана и позиција и оријентација врха робота дуж трајекторије. Путања облика хеликоиде приказана је на сл. 5.17.

Завојница са сл. 5.17 конструисана је за вредности параметара $r = 0.8$, $h = 1$, $x_0 = 1.5$, $y_0 = 1$ и $z_0 = 0$. Заједно са путањом, приказана је и оријентација природног триедра у три тачке путање, одређене вредностима параметра $\sigma = \pi/2$, $\sigma = 15\pi/8$, и $\sigma = 3\pi$.

5.2.3 Рачунање брзине зглобова током ЦП кретања

У претходним поглављима видели смо начине на који можемо дефинисати путању по којој се врх робота креће. Та путања је дефинисана у зависности од параметра σ који непрекидно расте током кретања. Како ћемо дефинисати

$\sigma(t)$ је ствар избора, где се може користити било који метод описан раније, трапезни профил брзине, полином одређеног степена, кубни сплајн и остало. Сам избор зависи од тога шта робот треба да ради и који је профил брзине најбољи за жељени задатак. Одређивањем како се σ мења током времена, односно $\sigma(t)$, можемо одредити брзину врха робота коришћењем извода сложене функције односно:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = \mathbf{p}'(\sigma) \cdot \dot{\sigma}.$$

На сличан начин се може одредити и угаона брзина врха робота ω, али се око тога мора мало више повести рачуна, јер та веза додатно зависи и од начина репрезентације оријентације. То је детаљно обрађено у поглављима 4.1 - 4.3 када смо се бавили диференцијалном кинематиком, уводили Јакобијан и нумерички решавали инверзни кинематски проблем.

Као што је већ речено у поглављу 4.4.4, брзину у зглобовима за жељену брзину и угаону брзину врха робота $\dot{\mathbf{s}^{\mathbf{d}}} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}^T & \boldsymbol{\omega}\end{bmatrix}^T$ и ω можемо одредити коришћењем МП инверзне матрице:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{+}\dot{\mathbf{s}}^{d}. \tag{5.67}$$

Ова једначина решава и унифицира многе случајеве, међутим не узима у обзир конструкциона ограничења робота. На пример, уколико врх робота треба да се креће дуж праве линије, може лако се десити да иако робот изађе из свог радног простора иако су му почетна и крајња тачка путање у простору унутар радног простора. Овако нешто није могуће током ПТП кретања јер се оно задаје у унутрашњим координатама робота и ако су прва и последња тачка унутар ограничења у зглобовима све тачке између њих ће такође бити унутар радног простора, уколико мало обратимо на начин и резултат интерполације. Уз то ограничења на максималну брзину и убрзање у зглобовима је лако наметнути током ПТП кретања, било бирањем трапезног профила брзине који директно намеће максималну брзину и убрзање, било продужавањем времена кретања уколико се користе полиноми или кубни сплајнови. Овако нешто није могуће приликом ПТП кретања, јер је однос између брзине врха робота и брзине у зглобовима зависно од Јакобијана који директно зависи од конфигурације. На пример, када је робот близу сингуларне конфигурације, захтеване брзине у зглобовима су врло велике и лако се може десити да робот није у стању да то изведе.

Из ових разлога приликом плаанирања ЦП кретања потребно нам је да додатно обратимо пажњу на ограничења и да би смо то постигли једначину ћемо записати у облику оптимизационог проблема:

$$\min_{\dot{\mathbf{q}}} \left\| \mathbf{J}(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{s}}^{d} \right\|^2, \tag{5.68}$$

где $\|\cdot\|$ означава Л2 норму. Речима описано, потребно је наћи брзину у зглобовима $\dot{\mathbf{q}}$ за коју је квадрат одступања брзине која врха робота $\mathbf{J}(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}$ која се остварује за брзину у зглобовима $\dot{\mathbf{q}}$ од жељене брзине врха робота $\dot{\mathbf{s}}^{d}$ минималан. Опште решење овог оптимизационог проблема је дато једначином (5.67), и тада је одступање од жељене брзине врха робота једнако нули.

Оно што је коришћења овог приступа јесте што је приликом решавања оптимизационог проблема можемо увести и ограничења, што оптимизациони проблем не мари за то да ли је систем редундантан или не и да ли је матрица Јакобијана регуларна или сингуларна. Уз то, нумеричка оптимизација је веома заступљена у модерној роботици што је довело и до врло ефикасних алгоритама за нумеричко решавање оптимизационих проблема. Оптимизациони проглем који решавамо (5.68) је конвексан квадратни оптимизациони проблем. Одатле следи да увек постоји само један глобални оптимум и да се врло ефикасно може решити нумерички. Овде треба напоменути да је оптимизациони проблем нелинеаран по $\mathbf{q}$ од кога зависи Јакобијан, али нам то није проблем јер зато што не оптимизујемо по конфигурацији $\mathbf{q}$ већ по брзину у зглобовима $\dot{\mathbf{q}}$, па се $\mathbf{q}$ може сматрати константним параметром.

5.2.4 Ограничења на брзину у зглобовима

Како смо видели начин да представимо планирање кретања као оптимизациони проблем најлакше нам је прво да додамо ограничења на брзину у зглобовима као ограничења типа неједнакости у оптимизационом проблему, који ће сада изгледати овако:

$$\begin{aligned} \min_{\dot{\mathbf{q}}} \quad & \left\| \mathbf{J}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{s}}^{d} \right\|^{2} \\ : \quad & \dot{\mathbf{q}}_{\min} \leq \dot{\mathbf{q}} \leq \dot{\mathbf{q}}_{\max}. \end{aligned} \tag{5.69}$$

где су $\dot{\mathbf{q}}_{\min}$ и $\dot{\mathbf{q}}_{\max}$ вектори минималних и максималних брзина у зглобовима. Ово би се могло описати речима: "потребно је наћи брзину у зглобовима која је унутар опсега који робот може да оствари тако да је одступање кретања врха робота од жељеног минимално".

Овај оптимизациони проблем је сам по себи већ тежи од претходног и нема решење у затвореном облику већ се мора решавати нумерички. Срећом, са овим ограничењем оптимизациони проблем и даље спада у класу конвексних квадратних оптимизационих проблема за шта постоје ефикасни алати за решавање.

5.2.5 Ограничења на позицију, брзину и убрзање у зглобовима

Као природни наставак на претходно поглавље, можемо додати ограничења на координате и убрзања у зглобовима. Они се додају користећи дискретну апроксимацију кретања у зглобовима, односно:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &\approx \frac{\mathbf{q_{n+1}} - \mathbf{q_n}}{h} \\ \ddot{\mathbf{q}} &\approx \frac{\dot{\mathbf{q}}_{n+1} - \dot{\mathbf{q}}_{n}}{h}, \end{aligned}$$

где је h временски корак. Одатле се могу извести ограничења на брзину на основу ограничења на позицију и убрзање у зглобовима. Сва ограничења на крају морају бити написана у зависности од брзине у зглобовима $\dot{\mathbf{q}}$ како бисмо их могли да укључимо у оптимизациони проблем. На основу тога добијамо

следећи оптмизациони проблем:

$$\begin{aligned} \min_{\dot{\mathbf{q}}} \quad & \left\| \mathbf{J}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{s}}^{d} \right\|^{2} \\ \text{уз ограничења:} \quad & \mathbf{q}_{\min} \leq \mathbf{q} + h\dot{\mathbf{q}} \leq \mathbf{q}_{\max} \\ & \dot{\mathbf{q}}_{\min} \leq \dot{\mathbf{q}} \leq \dot{\mathbf{q}}_{\max} \\ & \ddot{\mathbf{q}}_{\min} \leq \frac{\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_{-1}}{h} \leq \ddot{\mathbf{q}}_{\max}, \end{aligned}$$

где су $\dot{\mathbf{q}}_{\min}$, $\dot{\mathbf{q}}_{\max}$, $\ddot{\mathbf{q}}_{\min}$ и $\ddot{\mathbf{q}}_{\max}$ вектори минималних и максималних брзина и убрзања у зглобовима, док је $\dot{\mathbf{q}}_{-1}$ брзина у зглобовима у претходном временском тренутку. Ограничење на позицију се односи на следећи временски тренутак, и сматра се да је тренутна позиција $\mathbf{q}$ унутар граница $\mathbf{q}_{\min}$ и $\mathbf{q}_{\max}$. Ограничење на брзину и убрзање се односи на третренутне вредности, где се за апроксимацију убрзања користи вредност брзине из претходног временског тренутка.

Треба напоменути да се може јавити ситуација када је немогуће задовољити сва три ограниченка, ограничење на позицију, брзину и убрзање. Уколико су само два од три присутна, нпр ограничење на позицију и брзину или ограничење на брзину и убрзање, увек постоји решење. То је случај када зглоб иде сувише брзо да би закочио до ограничења на позицију. У реланим системима са релативно малим временским кораком, ово се ретко дешава и може се решити модулисањем максималне и минималне брзине у регионима када су координате зглобова близу граница.

5.2.6 Центрирање зглобова

У случају да је систем редундантан, може се догодити да постоји бесконачно много решења за оптимизациони проблем, нарочито уколико је робот далеко од ограничења. Глобални оптимум је исти, али сам избор решења зависи од нумеричког алата који се користи. Из тог разлога за редунданте системе много је боље изменити функцију циља тако да постоји јединствено глобално решење.

То се често ради увођењем секундарног циља који се врши тако да не ремети примарни циљ, односно кретање врха робота. То теоретски може бити било шта, али у пракси се често користи центрирање зглобова односно навођење зглобова ка некој номиналној конфигурацији $\mathbf{q_0}$. Она може бити било која конфигурација, али најбоље је да она буде у средини опсега који робот може да оствари, односно $\mathbf{q_0} = \left(\mathbf{q}_{\min} + \mathbf{q}_{\max}\right)/\mathbf{2}$.

У то случају оптимизациони проблем ће изгледати овако:

$$\begin{aligned} \min_{\dot{\mathbf{q}}} \quad & \left\| \mathbf{J}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{s}}^{d} \right\|^{2} + \epsilon\mathbf{N}\left\| \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\left(\mathbf{q_0} - \mathbf{q}\right) \right\|^{2} \\ \text{уз ограничења:} \quad & \mathbf{q}_{\min} \leq \mathbf{q} + h\dot{\mathbf{q}} \leq \mathbf{q}_{\max} \\ & \dot{\mathbf{q}}_{\min} \leq \dot{\mathbf{q}} \leq \dot{\mathbf{q}}_{\max} \\ & \ddot{\mathbf{q}}_{\min} \leq \frac{\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_{-1}}{h} \leq \ddot{\mathbf{q}}_{\max}, \end{aligned}$$

где је ϵ параметар који контролише релативну важност секундарног циља у

односу на примарни циљ. Овде други сабирак у функцији циља представља секундарни циљ и он је изражен као П регулатор који води зглобове ка номиналној конфигурацији, са појачањима датим у дијагоналној матрици $\mathbf{K}$. Матрица $\mathbf{N} = \mathbf{I} - \mathbf{J}^{+}\mathbf{J}$ је матрица која пројекује брзину у зглобовима на нулти простор Јакобијана. Нулти простор Јакобијана је скуп свих брзина у зглобовима које не утичу на кретање врха робота. Он је за нередудантне роботе празан скуп, али за редунданте системе он постоји.

Скалар ϵ је параметар који контролише релативну важност секундарног циља у односу на примарни циљ. Ако решење оптимизационог проблема није достигло ниједно ограничење секундарни циљ неће утицати на примарни циљ. Али ако су ограничења достигнута, може се изазвати конфликт између два циља. Зато се бира $\epsilon \ll 1$ да би дали примарном циљу релативно више тежине, $\epsilon = 0.01$ се показао као добар избор.

Још треба напоменути да уколико изоставимо сва ограничења овај оптмизциони проблем има решење у затвореном облику и то је:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{+}\dot{\mathbf{s}}^{d} + \mathbf{N}\mathbf{K}\left(\mathbf{q_0} - \mathbf{q}\right). \tag{5.70}$$

5.2.7 Алтернативне формулације оптимизационог проблема

У претходним случајевима смо користили прилично једноставну формулацију функције циља. Међутим, она није идеална, јер се приликом наиласка на ограничење дешава да робот одступи од жељене путање и скрене са ње. То одступање се минимизује, али оно ипак постоји. У неким применама робота, на пример електролучно заваривање, наношење лепка и слично, то може представљати проблем. Боље је да робот успори али да се држи на путањи све време. За такво понашање, потребан нам је другачији облик функције циља. У овом случају се праћење путање обезбеђује као ограничење типа једнакости. У том случају оптимизациони проблем ће изгледати овако:

$$\begin{aligned}
&\max_{\dot{\mathbf{q}},\alpha} && \alpha \\
&\text{уз ограничења:} && \mathbf{J}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{q}} = \alpha\dot{\mathbf{s}}^{d} \\
& && 0 \leq \alpha \leq 1 \\
& && \mathbf{q}_{\min} \leq \mathbf{q} + h\dot{\mathbf{q}} \leq \mathbf{q}_{\max} \\
& && \dot{\mathbf{q}}_{\min} \leq \dot{\mathbf{q}} \leq \dot{\mathbf{q}}_{\max} \\
& && \ddot{\mathbf{q}}_{\min} \leq \frac{\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_{-1}}{h} \leq \ddot{\mathbf{q}}_{\max}.
\end{aligned}$$

Овде је додат још један параметар α који регулише успорење. Када је $\alpha = 1$ врх робота се креће брзином $\dot{\mathbf{s}}^{d}$, а када је $\alpha = 0$ врх робота се зауставља. Прво ограничење је ограничење типа једнакости и оно обезбеђује да врх робота се креће у истом смеру као и жељена брзина врха робота $\dot{\mathbf{s}}^{d}$. Остала ограничења су иста као у претходним случајевима.

Треба напоменути да чак и у случају да је Јакобијан сингуларан, овај оптимизациони проблем има решење. То је решење када је $\alpha = 0$ и $\dot{\mathbf{q}} = 0$. То значи да када робот крене ка сингуларној тачки, он ће се постепено успорити и зауставити се. Такође ако се од врха робота захтева исувише велика

брзина, робот ће се кретати максималном брзином коју може да оствари а да притом не скрене са жељене путање. Ова форма оптимизационог проблема, са одговарајућим ограничењима се показала у пракси као веома ефикасна.

5.3 ПЛАНИРАЊЕ КРЕТАЊА У ПРИСУСТВУ ПРЕПРЕКА

ТОДО: Планирање кретања у присуству препрека

ЛИТЕРАТУРА

Craig J., *Introduction to Robotics: Mechanics & Control*, Addison–Wesley, 1986.

Fu K., Gonzales R., Lee C., *Robotics: Control, Sensing, Vision and Intellignece*, McGraw-Hill, 1987.

Sciavicco L., Siciliano B., *Modeling and Control of Robot Manipulators*, McGraw-Hill, 1996.

Shoemake, K. *Animating rotation with quaternion curves.* Proceedings of the 12th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. 1985.

Siciliano B., Khatib O. (Eds.), *Springer handbook of robotics*, Springer-Verlag, 2008.

Vukobratović M., (u saradnji sa Đurović M., Hristić D., Karan B., Kirćanski M., Kirćanski N., Stokić D., Vujić D., Živković V.), *Uvod u robotiku, Institut Mihajlo Pupin,* Beograd, 1988.

Vukobratović M., Cvetković V., Kirćanski M., *Kinamatički i dinamički prilaz sinezi kretanja manipulacionih robota*, Institut Mihajlo Pupin, Beograd, 1981

Moler, CB. *Numerical computing with MATLAB* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2004.

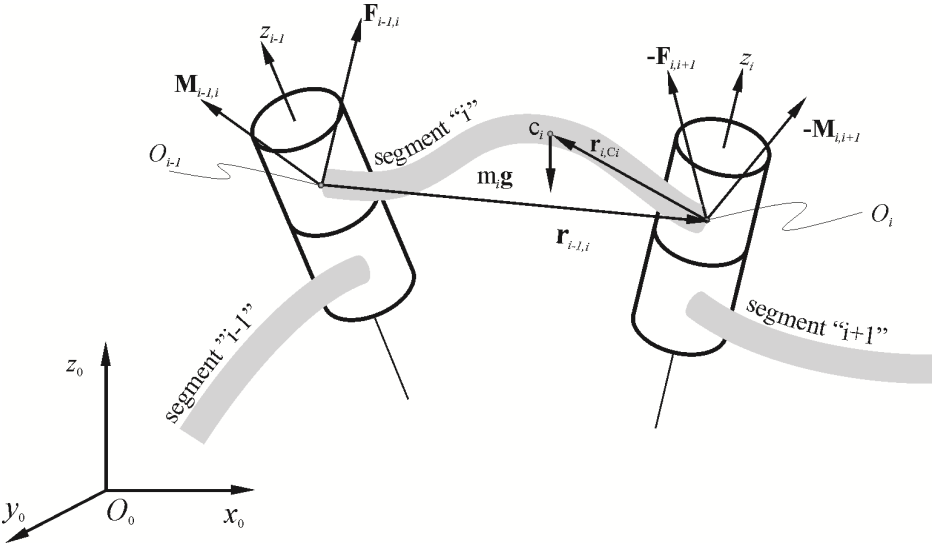
Tedrake, R. *Robotic Manipulation, Perception, Planning, and Control* Course Notes for MIT 6.421, Boston, 2026.

6. СТАТИЧКА И ДИНАМИЧКА АНАЛИЗА МАНИПУЛАЦИОНИХ РОБОТА

Да би се реализовало планирано кретање хватаљке манипулационих робота неопходно је остварити симултано кретање свих сегмената кинематског ланца. То се постиже саопштавањем одговарајућих погонских момената моторима у зглобовима кинематског ланца што представља сложен задатак јер се, како интензитети сила тако и њихови моменти, мењају током покрета па их је потребно срачунавати у сваком временском тренутку. Основу за одређивање свих динамичких утицаја (који настају услед гравитационих, инерцијалних, центрифугалних и Кориолисових сила) на зглобове механичке конфигурације представља моделирање динамичког понашања роботских механизама. С обзиром на разноликост механичких структура робота и кретања која могу бити захтевана, најцелисходније је да се за моделирање динамичког понашања током кретања било које механичке конфигурације робота формира општи рачунарски алгоритам који можемо лако прилагодити сваком посебном случају. У овој глави ће бити размотрене основе динамичког моделирања робота, и предложен алгоритам за његово формирање.

6.1 СТАТИЧКА АНАЛИЗА

Размотримо најпре равнотежу i-тог сегмента у оквиру отвореног кинематског ланца који се не креће већ стоји у одређеном положају. Када робот мирује оптерећење у зглобовима механизма узрокују само силе сопствене тежине сегмената. Важно је напоменути да било који зглоб трпи оптерећење које узрокују сви сегменти који се налазе даље, према врху кинематског ланца.



Слика 6.1: Силе и моменти који делују на i-ти сегмент (статички случај)

На сл. 6.1 је схематски приказан i-ти сегмент кинематског ланца који се

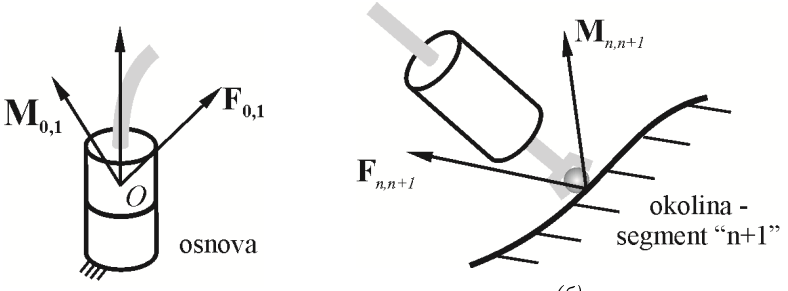
налази између *u-1*-вог и *u+1*-вог сегмента. На *i*-том сегменту се налази *u-1*-ви и *i*-ти зглоб који остварују везу са суседним сегментима. Да би посматрали равнотежу *i*-тог сегмента ослободимо се веза у зглобовима и заменимо утицај *u-1*-вог на *i*-ти сегмент моментом $\mathbf{M}_{i-1,i}$ и силом $\mathbf{F}_{i-1,i}$ а мометом $\mathbf{M}_{i,i+1}$ и силом $\mathbf{F}_{i,i+1}$ утицај *i*-тог на $i+1$-ви сегмент. Момент $\mathbf{M}_{i,i+1}$ и сила $\mathbf{F}_{i,i+1}$ су на сл. 6.1 приказани са знаком "-" ($-\mathbf{M}_{i,i+1}$ и $-\mathbf{F}_{i,i+1}$) с обзиром да је утицај *u+1*-вог сегмента на *i*-ти (на основу трећег Њутновог закона акције и реакције) исти као *i*-тог на *u+1*-ви, али обрнутог смера.

Осим наведених утицаја суседних сегмената на *i*-ти сегмент још, у тежишту C_i, делује сила сопствене тежине $m_i\mathbf{g}$. С обзиром да је механизам у равнотежи, понашање посматраног сегмента се може описати са две векторске једначине: $\sum \mathbf{F}_i = 0$ и $\sum \mathbf{F}_i = 0$. Према томе,

$$\sum \mathbf{F}_i = 0: \ \mathbf{F}_{i-1,i} - \mathbf{F}_{i,i+1} + m_i \cdot \mathbf{g} = 0 \tag{6.1}$$

$$\sum \mathbf{M}_i = 0: \ \mathbf{M}_{i-1,i} - \mathbf{M}_{i,i+1} - (\mathbf{r}_{i-1,i} + \mathbf{r}_{i,C_i}) \times \mathbf{F}_{i-1,i} + (-\mathbf{r}_{i,C_i}) \times (-\mathbf{F}_{i,i+1}) = 0 \tag{6.2}$$

представља једначине равнотеже система који се не креће (стоји) где су сви вектори изражени у односу на базни координатни систем $O_0 - x_0y_0z_0$. Моментна једначина (6.2) је написана у односу на тежиште *i*-тог сегмента, док $\mathbf{r}_{i-1,i}$ и $\mathbf{r}_{i,c}$ означавају радијус векторе од *u-1*-вог до *i*-тог зглоба и од *i*-тог зглоба до тежишта *i*-тог сегмента C_i, респективно. Моменти и силе у зглобовима се још називају спрезањем или куповањем (енгл. цоуплинг момент анд форце) између сегмената. Тако, на пример, момент $\mathbf{M}_{i-1,i}$ и сила $\mathbf{F}_{i-1,i}$ представљају момент и силу спрезања *u-1*-вог и *i*-тог сегмента. У случају када је $i = 1$ (сл. 6.2а) момент $\mathbf{M}_{0,1}$ и сила $\mathbf{M}_{0,1}$ се односе на спрезање између првог сегмента и основе (базе) робота, док у случају када је $i = n$ (сл. 6.2б) момент $\mathbf{M}_{n,n+1}$ и сила $\mathbf{F}_{n,n+1}$ представљају момент и силу којом последњи сегмент кинематског ланца (хватаљка, објекат или алат који робот носи) делује на околину. Индексом н+1 је означена околина која се условно може сматрати сегментом. Наравно, момент и сила којом околина делује на хватаљку робота су супротног знака и истог правца и интензитета ($-\mathbf{M}_{n,n+1}$ и $-\mathbf{F}_{n,n+1}$). Ради лакшег рада објединимо момент $\mathbf{M}_{n,n+1}$ и силу $\mathbf{F}_{n,n+1}$ у јединствен вектор димензије (6×1) који ћемо скраћено назвати спрезањем са околином (или дејством околине на робот) и обележити са $\mathbf{F}_{ext}$.



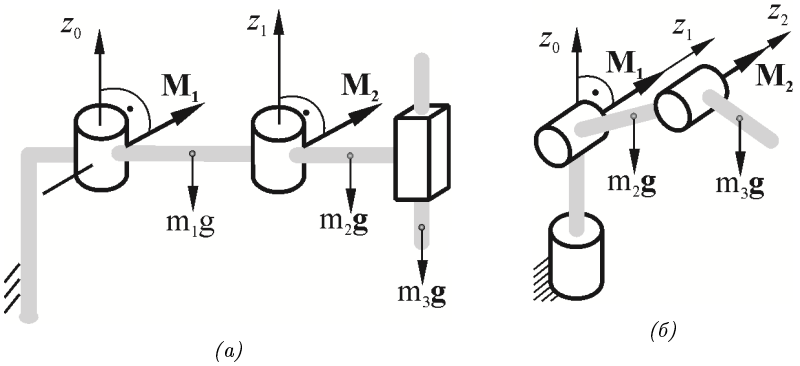
Слика 6.2: Спрезање а) између робота и основе и б) околине и хватаљке

Једначине (6.1) и (6.2) се могу написати за свих $i = 1, \ldots, n$ сегмената, на основу чега

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{n,n+1} \\ \mathbf{M}_{n,n+1} \end{bmatrix}. \tag{6.3}$$

Имамо укупно $2n$ једначина са $2n + 2$ непознатих ($n + 1$ момената и $n + 1$ сила). Да би систем могли да решимо потребно је унапред задати (прописати) или познавати једну силу и један момент. С обзиром да су у индустријским применама задаци познати унапред, најприродније је задати (прописати) момент (или силу) која представља жељено деловање робота на околину које нам је познато на основу самог задатка који робот реализује. Примера ради, уколико се робот креће кроз слободан простор не долазећи у контакт са околином оптерећење $\mathbf{F}_{ext}$ је једнако нули ($\mathbf{M}_{n,n+1} = 0$ и $\mathbf{F}_{n,n+1} = 0$). Међутим, уколико робот током реализације радног задатка долази у контакт са околином (нпр. при линијском електроотпорном заваривању, обарању ивица на радном предмету глодањем или брушењем, при полирању, ...) сила којом хватаљка или алат делују на околину је позната из технолошких услова процеса. Нпр. при електроотпорном заваривању сила коју је потребно остварити алатом на делове који се спајају и одржавати током процеса прописана је у зависности од врсте материјала и дебљине лимова. Према томе, можемо сматрати да је $\mathbf{F}_{ext}$ у случају реализације индустријских задатака познато и да је из система од $2n$ једначина могуће одредити $2n$ непознатих.

Размотримо сада везу између сила и момената спрезања и погонских сила или момената (скраћено погона) у зглобовима робота. У општем случају се вектор спрезања (силе и моменти који се јављају у једначинама (6.1) и (6.2)) разликује од вектора погона. Илустрације ради ћемо размотрити две типичне конфигурације индустријских робота: робот СЦАРА и антропоморфне (ПУМА) конфигурације.



(а) (б)

Слика 6.3: Гравитационо оптерећење зглобова робота а) СЦАРА и б) антропоморфне конфигурације

Прва два сегмента минималне конфигурације СЦАРА робота се могу кретати само у хоризонталној равни, док се последња два сегмента антропоморфне конфигурације могу кретати само у вертикалној равни (сл. 6.3). У случају робота СЦАРА конфигурације оптерећење услед тежине сва три сегмента (сл. 6.3а) се у целости преноси на конструкцију првог и другог зглоба и није потребно додатно ангажовање мотора да би се очувао тренутни положај

прва два сегмента у хоризонталној равни. Механичка конфигурација ће остати у било ком положају у хоризонталној равни и после искључивања мотора. Сасвим је обрнута ситуација код робота антропоморфне конфигурације (сл. 6.3б), где комплетно гравитационо оптерећење које делује на други и трећи зглоб мора да буде уравнотежено дејством мотора, док оријентација првог зглоба омогућава да гравитационо оптерећење у целости прима конструкција зглоба.

Из ових примера се види да уколико је вектор момента гравитационих оптерећења колинеаран са осом зглоба дато оптерећења се у потпуности мора компензовати моторима, тј. оптерећење одговара захтеваном погонском моменту. Међутим, уколико је вектор момента гравитационих оптерећења управан на осу зглоба дато оптерећења ће у потпуности примити структура самог зглоба и није потребно активирати моторе да би се одржала тренутна поза. Ако је положај вектора оптерећења између та два гранична случаја и налази се под неким углом према оси зглоба, део оптерећења ће примити структура зглоба, док се део мора компензовати моторима. Према томе, мотор мора да компензује само ону компоненту оптерећења (момент или силу) која је колинеарна са осом зглоба и коју називамо погоном. Потпуно истоветно разматрање важи и за ротационе и за транслаторне зглобове. Погон (обележимо га ознаком $\boldsymbol{\tau}$) у случају транслаторног зглоба представља силу и може се срачунати као скаларни производ орта одговарајуће осе зглоба и вектора силе

$$\tau_i = \mathbf{z}_{i-1} \cdot \mathbf{F}_{i-1,i}. \tag{6.4}$$

У случају ротационог зглоба $\boldsymbol{\tau}$ је момент и може се, аналогно (6.4), срачунати као скаларни производ орта одговарајуће осе зглоба и вектора момента оптерећења

$$\tau_i = \mathbf{z}_{i-1} \cdot \mathbf{M}_{i-1,i} \tag{6.5}$$

Треба приметити да у оба претходна случаја трење у зглобовима није узето у обзир јер је триболошка ситуација у самом зглобу у суштини непозната и променљива током времена. Погонски моменти у зглобовима τ_i се могу објединити у један вектор

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

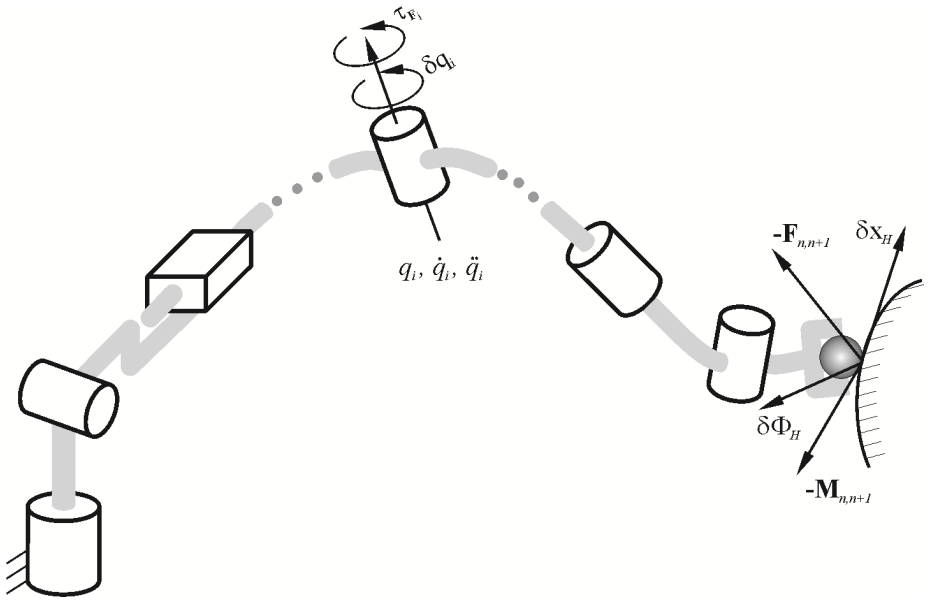
који називамо вектором погона и који може садржавати и силе и моменте у зависности од типа зглобова.

6.1.1 Веза спољашњих сила које делују на робот и момената у зглобовима

Од посебног је интереса да се изведе зависност између спољне силе $\mathbf{F}_{ext}$ којом околина делује на робот и одговарајућих погонских момената који ту силу уравнотежавају. Претпоставимо да се робот не креће и да својим врхом на околину делује силом $\mathbf{F}_{ext}$. Тада ћемо са $\boldsymbol{\tau}_F$ обележити моменте у зглобовима механичке конфигурације који ту силу уравнотежавају и наш задатак је да се нађе веза између $\mathbf{F}_{ext}$ и $\boldsymbol{\tau}_F$.

Да би ову релацију извели искористићемо принцип виртуелног рада. Да би смо разумели концепт виртуелног рада, размотримо најпре тзв. виртуелне померање. Под виртуелним померањима се подразумевају инфинитезимални помераји механичког система које дозвољавају везе. За разлику од стварних, виртуелни помераји треба само да буду у сагласности са ограничењима која намећу везе, док се осталим законима кретања не покоравају. У разматраном случају (сл. 6.4) виртуелни помераји у зглобовима δq_i изазивају линеарно $\delta\mathbf{x}_H$ и угаоно $\delta\mathbf{\Phi}_H$ виртуелно померање хватаљке. Такође претпоставимо да је роботски механизам без тежине тако да нема гравитационих оптерећења и да је робот у контакту са околином тако да на њега делују $-\mathbf{M}_{n,n+1}$ и $-\mathbf{F}_{n,n+1}$, док у зглобовима делују погонски моменти τ_{F_i} који ово оптерећење уравнотежавају. У том случају је виртуелни рад свих сила дат са

$$\delta\mathbf{w} = \tau_{\mathbf{F}_1}\cdot\delta q_1 + \tau_{\mathbf{F}_2}\cdot\delta q_2 + \cdots + \tau_{\mathbf{F}_n}\cdot\delta q_n + \left(-\mathbf{F}^T_{n,n+1}\right)\cdot\delta\mathbf{x}_H + \left(-\mathbf{M}^T_{n,n+1}\right)\cdot\delta\mathbf{\Phi}_H. \quad (6.7)$$



Слика 6.4: Виртуелна померања хватаљке и зглобова

Виртуелни рад је једнак нули уколико је систем у равнотежи. Уколико претходну једначину запишемо у векторском облику (линеарно $\delta\mathbf{x}_H$ и угаоно $\delta\mathbf{\Phi}_H$ виртуелно померање хватаљке је обједињено у вектор $\delta\mathbf{s}$) следи

$$\delta\mathbf{w} = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}}{}^T\cdot\delta\mathbf{q} - \mathbf{F}^T_{\text{ext}}\cdot\delta\mathbf{s} = 0 \quad (6.8)$$

С обзиром да $\delta\mathbf{q}$ и $\delta\mathbf{s}$ нису независни већ да су повезани релацијом $\delta\mathbf{s} = \mathbf{J}\delta\mathbf{q}$ (приметимо да симбол d можемо да заменимо симболом δ) једначину (6.8) можемо написати у облику

$$\delta\mathbf{w} = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}}{}^T\cdot\delta\mathbf{q} - \mathbf{F}^T_{\text{ext}}\cdot\mathbf{J}\cdot\delta\mathbf{q} = \left(\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}} - \mathbf{J}^T\cdot\mathbf{F}_{\text{ext}}\right)^T\cdot\delta\mathbf{q} = 0. \quad (6.9)$$

С обзиром да су виртуелна померања различита од нуле $\delta\mathbf{q} \neq 0$, израз (6.9) може бити испуњен само уколико је израз у загради једнак нули, одакле следи

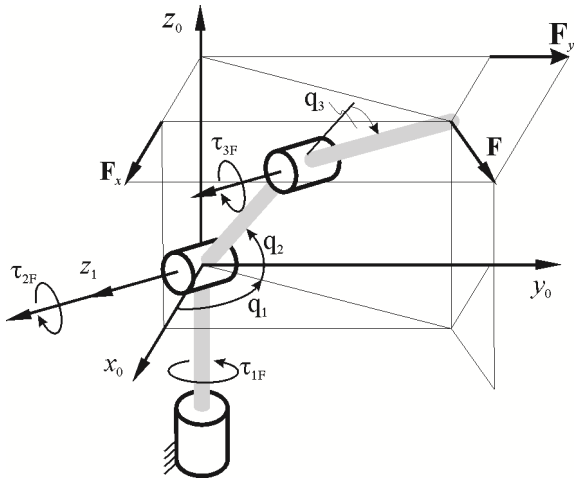
$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}} = \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}. \tag{6.10}$$

Ово је веома важна релација која повезује дејство робота на околину са погонима у зглобовима које такво дејство захтева. Скрећемо пажњу да се погони одређени на основу израза (6.10) односе само на уравнотежење утицаја спољњег оптерећења и да нису укључени никакви други динамички ефекти. Примера ради, у случају кретања робота који је у контакту са околином (нпр. као при линијском електроотпорном заваривању), на основу израза (6.10) можемо одредити колики се део укупног момента у посматраном зглобу користи за остваривање кретања, а колики за уравнотежавање силе којом робот делује на околину.

Пример 6.1.

За минималну конфигурацију (само прва три степена слободе) антропоморфног типа приказану на сл. 6.5. одредити потребне моменте у зглобовима тако да се врхом оствари сила $\mathbf{F}$ дата са:

$$\mathbf{F} = \left[F_x, F_y, F_z\right]^T = [10, 10, 0]^T N. \tag{6.11}$$



Слика 6.5: Сила којом робот делује на околину и одговарајући моменти у зглобовима

Јакобијан који одговара овој конфигурацији написан у аналитичкој форми је дат следећим изразом

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_2S1C2 - a_3S1C23 & -C1(a_2S2 + a_3C23) & -a_3C1S23 \\ a_2S1C2 + a_3C1C23 & -S1(a_2S2 + a_3S23) & a_3S1S23 \\ 0 & a_2C2 + a_3C23 & a_3C23 \end{bmatrix}, \tag{6.12}$$

па се, према (6.10), одговарајући моменти у зглобовима могу добити из

$$\begin{bmatrix}\tau_{1F}\\ \tau_{2F}\\ \tau_{3F}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a_2S1C2 - a_3S1C23 & a_2S1C2 + a_3C1C23 & 0\\ -C1(a_2S2 + a_3C23) & -S1(a_2S2 + a_3S23) & a_2C2 + a_3C23\\ -a_3C1S23 & a_3S1S23 & a_3C23\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\10\\0\end{bmatrix}. \tag{6.13}$$

Треба још једном напоменути да се, на овај начин одређени погони $\boldsymbol{\tau}_F$ односе само на уравнотежење дејства спољне силе $\mathbf{F}$ а не на погоне потребне за уравнотежавање гравитационих оптерећења како би робот стајао у датом положају. Очигледно је да у том случају укупни моменти треба да буду већи.

6.1.2 Попустљивост и крутост

Спољне силе којима околина делује на робот могу да изазову промене позиција зглобова механичке конфигурације (сегменти се могу сматрати крутим телима) а као последица се јавља померање врха робота. Ова особина понекад може бити непожељна (нпр. при обрадама радних предмета алатом који робот носи), али и веома важна ради спречавања хаварије при непланираном контакту (судару) самог робота или објекта којим робот манипулише са околином.

Нека је простор зглобова n димензионалан, простор хватаљке m димензионалан, τ_i је оптерећење (момент или сила) које се преноси преко i-тог зглоба, док је Δq_i његова дефлексија која настаје услед дејства спољне силе. У случају малих померања τ_i и Δq_i се могу повезати линеарном апроксимацијом

$$\tau_i = k_i \Delta q_i \tag{6.14}$$

где се k_i назива константом крутости. За целокупан механизам се скуп израза (6.14) може написати у матричној форми

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Theta}\Delta\mathbf{q} \tag{6.15}$$

где је $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n]^T$, $\Delta\mathbf{q} = [\Delta q_1, \Delta q_2, \cdots, \Delta q_n]^T$, док је $\boldsymbol{\Theta} = diag\,[k_1, k_2, \cdots, k_n]$ дијагонална матрица димензије $n \times n$. За роботе који имају структуру кинематског ланца, померања зглобова су са померањем хватаљке повезана Јакобијаном

$$\Delta\mathbf{s} = \mathbf{J}\Delta\mathbf{q}, \tag{6.16}$$

док је спољња сила која делује на хватаљку са моментима у зглобовима повезана изразом

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T\mathbf{F}. \tag{6.17}$$

Елиминацијом $\boldsymbol{\tau}$ и $\Delta\mathbf{q}$ из (6.16) и (6.17) добијамо

$$\Delta\mathbf{s} = \mathbf{C}\mathbf{F} \tag{6.18}$$

где је

$$\mathbf{C} = \mathbf{J}\boldsymbol{\Theta}^{-1}\mathbf{J}^T \tag{6.19}$$

матрица *попустљивости* (енгл. *цомплианце матрих*) димензије $m \times m$. Из (6.19) се може видети да укупна (композитна) крутост не зависи само од крутости сваког од погона већ и од јакобијана што значи да је попустљивост механизма зависи од његове тренутне позе.

Ако је $m = n$ и Јакобијева матрица није сингуларна, могуће је наћи инверзну матрицу попустљивости. Уколико обе стране израза (6.18) помножимо са $\mathbf{C}^{-1}$ добијамо

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{s} \tag{6.20}$$

где се

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}^{-1} = \left(\mathbf{J}^T\right)^{-1}\Theta\mathbf{J}^{-1} \tag{6.21}$$

назива матрицом крутости (енг. стиффнесс матрих).

Матрица крутости такође није константна и зависи од тренутне позе механизма. Крутост можемо квантификовати поређењем сила које су потребне да би се реализовао одређени (нпр. јединични) угиб хватаљке. Ако (6.18) сменимо у $(\Delta\mathbf{s})^T(\Delta\mathbf{s}) = 1$ добијамо

$$\mathbf{F}^T\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{F} = 1. \tag{6.22}$$

За одређену позу роботског манипулатора израз (6.22) представља м-димензионални елипсоид силе. Пошто је $\mathbf{F}^T\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{F}$ симетрична, позитивно семидефинитна матрица, њени сопствени вектори су међусобно ортогонални и поклапају се са правцем оса елипсоида. Дужине оса елипсоида су једнаке реципрочним вредностима квадратних корена сопствених вредности.

6.1.3 Трансформација утицаја сила и момената између различитих координатних система

Као што положај тачке можемо изразити у односу на различите координатне системе тако и утицај силе и момента можемо изразити у односу на различите координатне системе. На сл. 6.6. приказане су сила $\mathbf{F}$ и момент $\mathbf{M}$ који делују у истом правцу, а њиихово деловање посматраћемо у односу на два координатна система, $O_i - x_i y_i z_i$ и $O_j - x_j y_j z_j$. Силу и момент можемо представити као јединствени шестодимензионални вектор генералисаних сила $\mathfrak{I}$ у облику

$$\mathfrak{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{p}_0 \times \mathbf{F} + \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

У горњем изразу $\mathbf{F}$ представља силу, $\mathbf{p}_0$ је вектор позиције било које тачке која се налази на правцу силе $\mathbf{F}$ у односу на изабрани координатни систем, производ $\mathbf{p}_0 \times \mathbf{F}$ представља момент који сила има у односу на координатни почетак координатног система, а $\mathbf{M}$ је момент који делује око осе колинеарне са правцем дејства силе $\mathbf{F}$. Са сл. 6.6. се види да координатни систем $O_j - x_j y_j z_j$ у односу на $O_i - x_i y_i z_i$ одређује вектор позиције $\mathbf{d} = \left[d_x, d_y, d_z\right]^T$ координатног почетка O_j и матрицу ротације $\mathbf{R}_i^j$ координатног система $O_j - x_j y_j z_j$ у односу на $O_i - x_i y_i z_i$. Генералисана сила $\mathfrak{I}$ изражена у односу на координатни систем $O_i - x_i y_i z_i$ је обележена са $\mathfrak{I}^i$, а у односу на систем $O_j - x_j y_j z_j$ са $\mathfrak{I}^j$. $\mathfrak{I}^i$ и $\mathfrak{I}^j$ су повезани релацијом

$$\mathfrak{I}^i = \mathbf{T}_i^j\mathfrak{I}^j \tag{6.24}$$

где је $\mathbf{T}_i^j$ матрица димензије 6×6 коју можемо написати у следећој форми

$$\mathbf{T}_i^j = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i^j & 0 \\ \mathbf{W}_i^j \mathbf{R}_i^j & \mathbf{R}_i^j \end{bmatrix} \tag{6.25}$$

где је

$$\mathbf{W}_i^j = \begin{bmatrix} 0 & -d_z & d_y \\ d_z & 0 & -d_x \\ -d_y & d_x & 0 \end{bmatrix} \tag{6.26}$$

кососиметрична матрица вектора $\overrightarrow{O_i O_j}$ израженог у координатном систему $O_i - x_i y_i z_i$. На тај начин можемо генералисану силу изражену у једном, на једноставан начин, изразити у другом координатном систему.

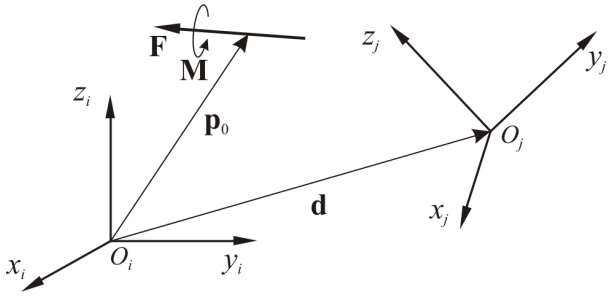
Пример 6.2.

На сл. 6.7 је приказана хватаљка робота са објектом који је у контакту са околином. За мерење контактних сила на врху објекта у зглобу хватаљке је постављен сензор силе и момента. Задатак је одредити силу и момент који стварно делују на врх објекта уколико су нам познате измерене вредности силе и момента у зглобу хватаљке.

Другим речима, потребно је познате силе и моменте изражене у координатном систему $O - uvw$ изразити у координатном систему $O - xyz$. Ако претпоставимо, без губитка општости, да су у тренутку посматрања координатни системи паралелни и да је дислокација врха објекта од центра сензора дата вектором $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}^T$ тада за овај случај важи

$$\mathbf{R}_{xyz}^{uvw} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{\mathbf{xyz}}^{\mathbf{uvw}} = \begin{bmatrix} 0 & -d_z & d_y \\ d_z & 0 & -d_x \\ -d_y & d_x & 0 \end{bmatrix}$$



Слика 6.6: Трансформација сила и момената између два координатна система

па трансформацију $\mathbf{T}_{xyz}^{uvw}$ добијамо у облику

$$\mathbf{T}_{xyz}^{uvw} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_z & d_y & 1 & 0 & 0 \\ d_z & 0 & -d_x & 0 & 1 & 0 \\ -d_y & d_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

на основу чега добијамо тражену везу у облику

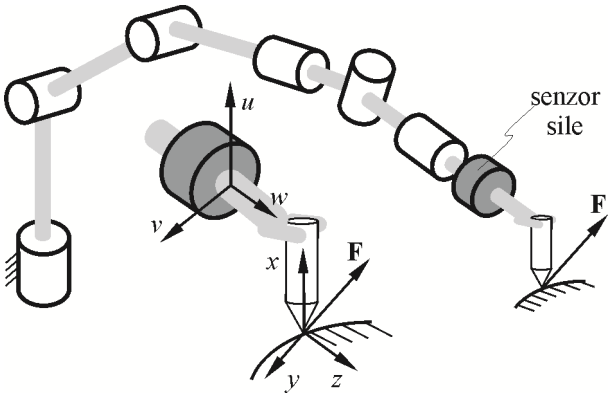
$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_z & d_y & 1 & 0 & 0 \\ d_z & 0 & -d_x & 0 & 1 & 0 \\ -d_y & d_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \\ M_u \\ M_v \\ M_w \end{bmatrix}. \tag{6.27}$$

На овај начин се могу, на основу мерења у зглобу хватаљке, одредити силе и моменти који делују на врху објекта који робот држи.

6.2 ДИНАМИЧКА АНАЛИЗА

У досадашњем разматрању је било претпостављено да се робот не креће и да је непокретан у одређеној пози. Међутим, симултано кретање свих сегмената производи веома сложене утицаје који су од изузетног значаја при управљању роботима и које ћемо у овом одељку размотрити.

Диференцијалне једначине кретања механизма можемо формирати на основу Њутн-Ојлеровог и Лагранжевог формализма. Њутн-Ојлерова формулација се заснива на директној примени другог Њутновог закона механике, па једначине садрже силе и моменте које делују на сваки појединачни сегмент, укључујући и силе и моменте спрезања у зглобовима. Осим тога, једначине садрже и реакције веза које делују између два суседна сегмента које је потребно елиминисати да би се добиле релације које у експлицитној форми



Слика 6.7: Трансформација сила и момената који делују на контакту објекта са околином на центар сензора који се налази у зглобу хватаљке

повезују моменте у зглобовима са кретањем механизма. При формирању једначина Њутн-Ојлеровим методом механизам се обилази од сегмента до сегмента на начин који се поклапа са природном представом о кинематском ланцу, што овом формализму даје додатну јасноћу и омогућава лакше разумевање ефеката који се јављају.

Са друге стране, у Лагранжевој формулацији динамичко понашање система као целине је описано помоћу рада и енергије коришћењем генералисаних координата. Обзиром да се у једначинама не појављују ни реакције веза ни силе које не врше рад резултујуће једначине су, у општем случају компактније. Осим тога, обезбеђују релације између момената у зглобовима и њихових померања у затвореној форми.

Прво ћемо приказати формирање динамичког модела на бази Њутн-Ојлерових а затим Лагранжевих једначина.

6.2.1 Њутн-ојлерова формулација једначина кретања

Размотримо једначине кретања једног сегмента роботског механизма. Кретање сваког крутог тела (сегменте механизма можемо сматрати крутим телима) се може разложити на транслаторно кретање било које његове тачке и ротацију око те тачке. Погодно је за ту произвољну тачку изабрати тежиште сегмента.

На сл. 6.8. је, слично статичком случају са сл. 6.1, приказан i-ти сегмент кинематског ланца са свим силама које на њега делују. У односу на сл. 6.1 овде се појављују и инерцијална сила и момент као последица кретања сегмента. Ако са C_i обележимо тежиште i-тог сегмента, тада је $\mathbf{v}_{Ci}$ линеарна брзина његовог тежишта изражена у односу на базни координатни систем $O_0{-}x_0y_0z_0$. Инерцијална сила је дата са $-m_i\dot{\mathbf{v}}_{Ci}$ где је са m_i означена маса сегмента, а са $\dot{\mathbf{v}}_{Ci}$ извод линеарне брзине тежишта по времену тј. убрзање тежишта.

Аналогно једначини (6.1), и овде се равнотежа свих сила које делују на i-ти сегмент може изразити као

$$\sum \mathbf{F} = 0 : \mathbf{F}_{i-1,i} - \mathbf{F}_{i,i+1} - m_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_{Ci} + m_i \cdot \mathbf{g} = 0,\ i = 1 \ldots n \tag{6.28}$$

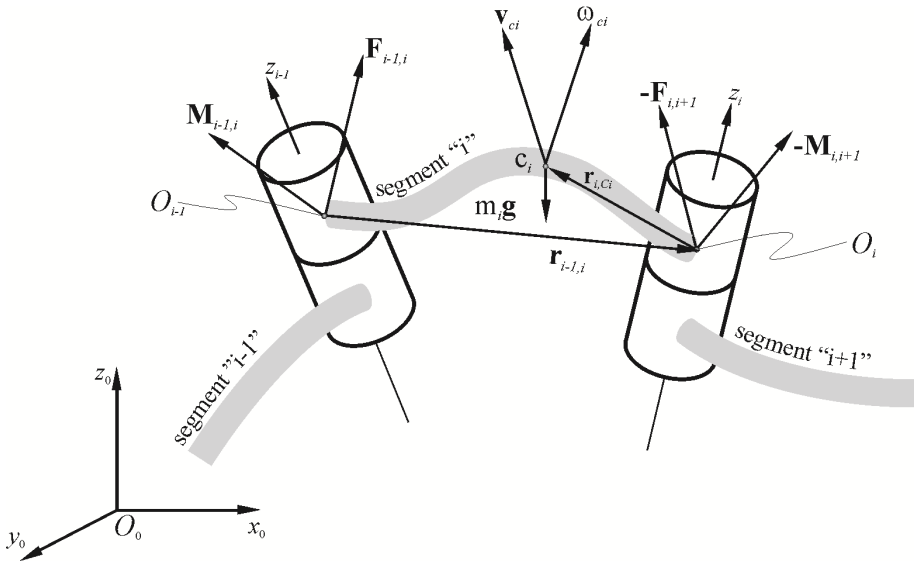
где су са $\mathbf{F}_{i-1,i}$ и $-\mathbf{F}_{i,i+1}$ означене силе којима на i-ти сегмент делују u-1-ви и $i+1$-ви сегмент, док је са $\mathbf{g}$ обележен вектор убрзања земљине теже.

На сличан начин можемо за овај случај написати једначину равнотеже момената, аналогну са (6.2), као

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{M} = 0 : \mathbf{M}_{i-1,i} - \mathbf{M}_{i,i+1} + \mathbf{r}_{i,C_i} \times \mathbf{F}_{i,i+1} - \\ - \mathbf{r}_{i-1,C_i} \times \mathbf{F}_{i-1,i} - I_i \cdot \dot{\omega}_i - \boldsymbol{\omega}_i \times (I_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i) = 0,\ i = 1 \ldots n\end{aligned} \tag{6.29}$$

где је са I_i обележен тензор инерције i-тог сегмента, представља обртни момент, док представља гироскопски момент. Једначине (6.28) и (6.29) описују динамичко понашање једног сегмента у кинематском ланцу. Обилазећи га од $i = 1 \ldots n$ може се формирати систем једначина којима се описује динамичко понашање укупног система.

Међутим, овако формиран систем једначина није погодан за динамичку



Слика 6.8: Силе и моменти који делују на i-ти сегмент (динамички случај)

анализу и синтезу управљања. Пре свега, потребно је обезбедити форму у којој су погонски моменти улазне величине, а као излазне треба да се појаве величине које потпуно дефинишу позицију механизма. Углови у зглобовима q_i конституишу такав независан скуп. Према томе, потребно је динамички модел тако реализовати да се на основу улазних момената могу директно добити помераји у зглобовима.

Овакав прилаз ћемо најбоље објаснити на примеру једноставног раванског двосегментног механизма приказаног на сл. 6.8. који је довољно једноставан да једначине не буду исувише сложене, али је довољно сложен да садржи све ефекте који се могу јавити.

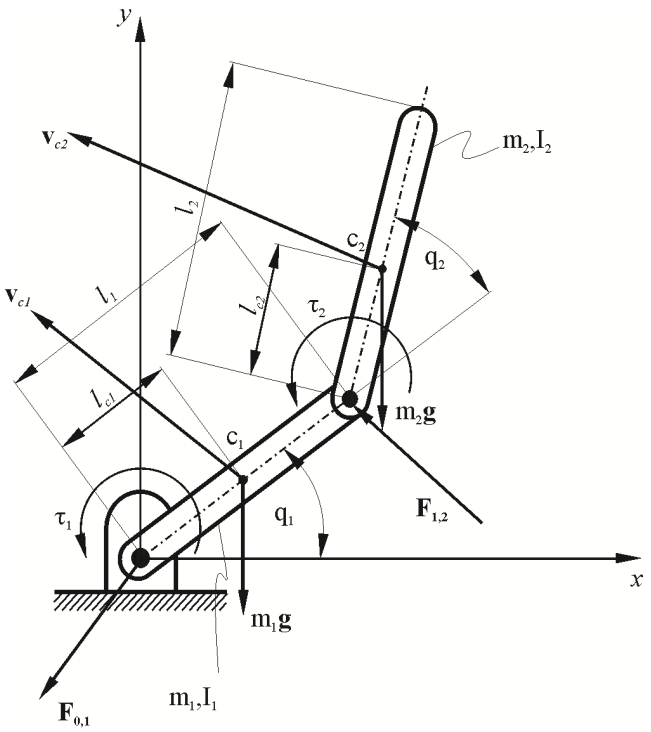
Пример 6.3.

За двосегментни равански манипулациони робот приказан на сл. 6.8. извести Њутн-Ојлерове једначине кретања и приказати их у форми погодној за динамичку анализу.

С обзиром да је механизам равански, угаона брзина тежишта сваког од сегмената се може приказти скаларном величином ω_i, док се транслаторна брзина може приказати вектором $\mathbf{v}_{C_i}$. У случају раванског механизма тензор инерције постаје скаларни момент инерције I_i у односу на тежиште. Све остале неопходне ознаке су дате на сл. 6.8.

Сагласно општим једначинама (6.28) и (6.29) Њутн-Ојлерове једначине за први сегмент се могу написати на следећи начин:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{0,1} - \mathbf{F}_{1,2} + m_1 \cdot \mathbf{g} - m_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}_{C1} &= 0 \\ \mathbf{M}_{0,1} - \mathbf{M}_{1,2} + (\mathbf{r}_{1,c2} \times \mathbf{F}_{1,2}) - \mathbf{r}_{0,c1} \times \mathbf{F}_{0,1} - I_1 \cdot \dot{\omega}_1 &= 0. \end{aligned} \tag{6.30}$$



Слика 6.9: Двосегментни равански механизам

На сличан начин су, једначине за други сегмент дате са

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1,2} + m_2 \cdot \mathbf{g} - m_2 \cdot \dot{\mathbf{v}}_{c2} = 0 \\ \mathbf{M}_{1,2} + (\mathbf{r}_{1,c2} \times \mathbf{F}_{1,2}) - I_2 \cdot \dot{\omega}_2 = 0 \end{aligned} \tag{6.31}$$

За равански механизам моменти $\mathbf{M}_{0,1}$ и $\mathbf{M}_{1,2}$ су управни на раван механизма па су моменти спрезања еквивалентни погонским моментима. Стога важи

$$\mathbf{M}_{0,1} = \tau_1, \ \mathbf{M}_{1,2} = \tau_2. \tag{6.32}$$

Ако сада, изразе за моменте убацимо у (6.31), и елиминишемо реакције веза тако што из прве једначине изразимо $\mathbf{F}_{1,2}$ и убацимо у другу, добијамо

$$\tau_2 + \mathbf{r}_{1,c2} \times m_2 \dot{\mathbf{v}}_{C2} - \mathbf{r}_{1,c2} \times m_2 \mathbf{g} - I_2 \dot{\omega}_2 = 0. \tag{6.33}$$

Слично се може урадити са системом (6.30) на основу чега следи

$$\tau_1 - \tau_2 - \mathbf{r}_{0,c1} \times m_1 \dot{\mathbf{v}}_{C1} - \mathbf{r}_{0,1} \times m_2 \dot{\mathbf{v}}_{C2} + \mathbf{r}_{0,C1} \times m_1 \mathbf{g} + \mathbf{r}_{0,1} \times m_2 \mathbf{g} - I_1 \dot{\omega}_1 = 0. \tag{6.34}$$

С обзиром да у овом случају за угаоне брзине можемо писати

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{q}_1, \ \boldsymbol{\omega}_2 = \dot{q}_2 \tag{6.35}$$

следи да су линеарне брзине тежишта $\mathbf{v}_{C1}$ и $\mathbf{v}_{C1}$

$$\mathbf{v}_{C1} = \begin{bmatrix} -l_{C_1}\dot{q}_1 \sin q_1 \\ l_{C_1}\dot{q}_1 \cos q_1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{v}_{C2} = \begin{bmatrix} -[l_1 \sin q_1 + l_{C_2} \sin(q_1+q_2)]\dot{q}_1 - l_{C_2} \sin(q_1+q_2)\dot{q}_2 \\ [l_1 \cos q_1 + l_{C_2} \cos(q_1+q_2)]\dot{q}_1 + l_{C_2} \cdot \cos(q_1+q_2)\dot{q}_2 \end{bmatrix}. \tag{6.36}$$

Заменом (6.35), (6.36) и њихових извода у (6.33) и (6.34) добијамо динамичке једначине у траженој форми

$$\begin{aligned} \tau_1 &= H_{11}\ddot{q}_1 + H_{12} \cdot \ddot{q}_2 - \hat{h}(\dot{q}_2)^2 - 2 \cdot \hat{h} \cdot \dot{q}_1\dot{q}_2 + G_1 \\ \tau_2 &= H_{22}\ddot{q}_2 + H_{12}\ddot{q}_1 + \hat{h}(\dot{q}_1)^2 + G_2 \end{aligned} \tag{6.37}$$

где је

$$H_{11} = m_1 \cdot l_{C1}^2 + I_1 + m_2[l_1^2 + l_{C2}^2 + 2 \cdot l_1 l_{C2} \cdot \cos q_2] + I_2 \tag{6.38}$$
$$H_{22} = m_2 l_{C2}^2 + I_2 \tag{6.39}$$
$$H_{12} = m_2 l_1 l_{C2} \cos q_2 + m_2 l_{C2}^2 + I_2 \tag{6.40}$$
$$\hat{h} = m_2 l_1 l_{C2} \cdot \sin q_2 \tag{6.41}$$
$$G_1 = m_1 l_{C1} g \cos q_1 + m_2 g\{l_{C2} \cos(q_1+q_2) + l_1 \cos q_1\} \tag{6.42}$$
$$G_2 = m_2 l_{C2} g \cdot \cos(q_1+q_2) \tag{6.43}$$

где скаларна величина $\mathbf{g}$ представља убрзање земљине теже усмерено вертикално наниже, тј. у негативном правцу y осе. Израз (6.37) се може у општем облику написати као

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}, \tag{6.44}$$

или у развијеној форми за пример двосегментног механизма

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

Матрица $\mathbf{H}$ се назива инерцијалном матрицом, вектор $\mathbf{h}$ укључује све ефекте настале због брзинских чланова, док вектор $\mathbf{G}$ представља гравитационо оптерећење.

У наредном делу ћемо детаљно размотрити физичко значење појединих чланова динамичког модела који је у развијеној форми дат изразима (6.37). Размотримо, најпре, први члан у (6.37). У случају да се други зглоб не покреће ($\ddot{q}_2 = \dot{q}_2 = 0$) и ако занемаримо гравитационо оптерећење тада прва једначина система постаје

$$\tau_1 = H_{11}\ddot{q}_1, \tag{6.45}$$

одакле се може закључити да члан H_{11} представља инерцијалност којом је оптерећен први зглоб због сопственог кретања тј. када се само он креће, док је други укочен ($\ddot{q}_2 = \dot{q}_2 = 0$). Важно је напоменути да инерцијалности H_{11} доприносе оба сегмента својом масом и моментом инерције, јер кретањем

првог зглоба покрећемо све сегменте који се у кинематском ланцу налазе даље. Приметимо затим, да прва два члана у једначини (6.38) представљају моменте инерције за осу обртања, што је у овом случају оса првог зглоба. Тако, $m_1 l_{C1}^2 + I_1$ представља укупни момент инерције првог сегмента за осу првог зглоба срачунат према Штајнеровим теоремама за срачунавање момента инерције за паралелне осе. Момент инерције другог сегмента зависи од тренутног растојања тежишта другог сегмента од осе првог зглоба, што је на сл. 6.10. обележено са L, а може се срачунати према изразу

$$L^2 = l_1^2 + l_{C_2}^2 + 2 l_1 l_{C_2} \cos q_2,$$

па је момент инерције другог сегмента за осу првог зглоба дат са

$$m_2 \cdot [l_1^2 + l_{C_2}^2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_{C_2} \cdot \cos q_2] + I_2 = m_2 \cdot L^2 + I_2$$

што одговара другом члану у (6.38). Веома је важно приметити да инерцијалност коју "осећа"први зглоб (у ствари, овај закључак је општи и важи за било који зглоб механизма) зависи од тренутног положаја механизма тј. од тренутне вредности углова у зглобовима q_i. Наравно, инерцијалност је максимална када је механизам потпуно испружен ($q_2 = 0$), а минимална када је други сегмент потпуно савијен ка оси првог зглоба ($q_2 = \pi$).

Да би испитали физичку природу другог члана у (6.37) претпоставимо да $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ и $\ddot{q}_1 = 0$. Тада прва једначина постаје

$$\tau_1 = H_{12} \ddot{q}_2, \tag{6.46}$$

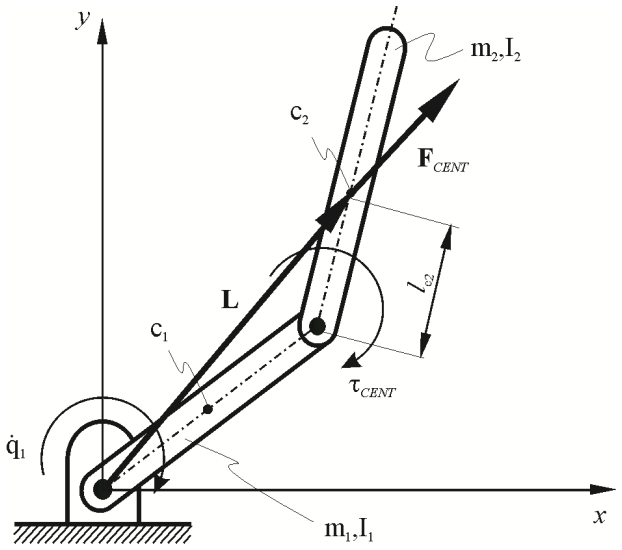
где смо опет занемарили гравитационо оптерећење. Из (6.46) се може закључити да члан H_{12} представља инерцијалне ефекте кретања другог сегмента који утичу на зглоб првог сегмента. Када други сегмент убрзава сила и момент реакције другог сегмента делују на зглоб првог. Утицај на први зглоб се може представити моментом спрезања (обележимо га са τ_{SPR}) који је дат следећим изразом

$$\tau_{SPR} = -\mathbf{M}_{1,2} - (\mathbf{r}_{0,1} \times \mathbf{F}_{1,2}) = -[I_2 + m_2 (l_{C_2}^2 + l_1 l_{C_2} \cos q_2)] \ddot{q}_2,$$

што се у потпуности поклапа са другим чланом у (6.37). Према томе, можемо да кажемо да H_{12} представља спрезање између два зглоба, тј. допринос моменту у првом зглобу, τ_1, услед кретања другог сегмента. Треба приметити да је кретање механизма раванско па се израз за τ_{SPR} може представити као скалар.

$$|\mathbf{F}_{CENT}| = m_2 \left|\mathbf{r}_{0,C_2}\right| (\dot{q}_1)^2. \tag{6.47}$$

Анализирајмо сада трећи члан у (6.37) који је пропорционалан квадрату брзина у зглобовима. Замислимо на тренутак, да за механизам у тренутку посматрања важи $\dot{q}_2 = 0$ и $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = 0$, тј. да постоји само брзина у првом зглобу која ће узроковати појаву центрифугалне силе као што је приказано на сл. 6.10. Правац центрифугалне силе (обележимо је са $\mathbf{F}_{CENT}$) је колинеаран са правцем радијус вектора $\mathbf{r}_{0,C_2}$, а интензитет је дат са



Слика 6.10: Центрифугална сила због кретања првог зглоба

Центрифугална сила узрокује момент око другог зглоба дат са

$$\boldsymbol{\tau}_{CENT} = \mathbf{r}_{1,C2} \times \mathbf{F}_{CENT} = -m_2 l_1 l_{C_2} (\dot{q}_1)^2 \sin q_2 \tag{6.48}$$

што одговара трећем члану у (6.37), па можемо да закључимо да овај члан представља утицај ценртифугалне силе на други зглоб услед кретања првог зглоба. На сличан начин се може показати да када се креће други зглоб услед дејства центрифугалне силе узроковане са $\dot{q}_2$ јавља се момент који делује на први зглоб.

I на крају ћемо размотрити четврти члан у (6.37). Посматрајмо случај када се оба зглоба симултано покрећу брзинама $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$. Кретање $\dot{q}_1$ називамо преносним, док је кретање $\dot{q}_2$ релативно. Тада је Кориолисово убрзање дато са

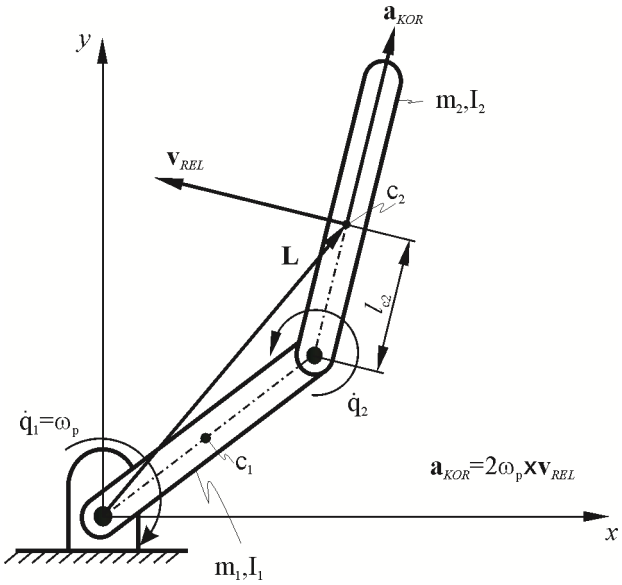
$$\mathbf{a}_{KOR} = 2\boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{v}_{REL} \tag{6.49}$$

где $\boldsymbol{\omega}_P$ означава угаону брзину преносног кретања (тј. угаону брзину првог сегмента), а $\mathbf{v}_{REL}$ линеарну брзину тежишта другог сегмента услед кретања узрокованог кретањем другог зглоба (тј. услед $\dot{q}_2$). Правац Кориолисовог убрзања је правац релативне брзине заокренут за 90° у правцу преносног кретања (види сл. 6.11). Кориолисова сила дата је са

$$\mathbf{F}_{KOR} = 2m\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_{C_2} = \begin{bmatrix} -2m_2 l_{C_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 + q_2) \\ -2m_2 l_{C_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \tag{6.50}$$

док је момент око првог зглоба узрокован овом силом дат са

$$\tau_{KOR} = \mathbf{r}_{0,C2} \times \mathbf{F}_{KOR} = 2m_2 l_1 l_{C_2} \sin q_2. \tag{6.51}$$



Слика 6.11: Преносно и релативно кретање и Кориолисово убрзање

Важно је да поменемо да правац Кориолисове силе пролази кроз други зглоб и неће узроковати додатни момент у другом зглобу. На овом примеру смо илустровали све ефекте који се приликом кретања механизма робота могу јавити. Јасно је да је динамички модел и овог једноставног раванског двосегментног механизма веома сложен. Са порастом броја степени слободе механизма сложеност модела се значајно увећава.

Да закључимо, у моделу динамике који је у општем облику дат једначином (6.44), матрица $\mathbf{H(q)}$ представља инерцијалну матрицу система чији елементи, за конкретну конфигурацију, зависе од положаја свих сегмената који се у кинематском ланцу налазе после i-тог зглоба.

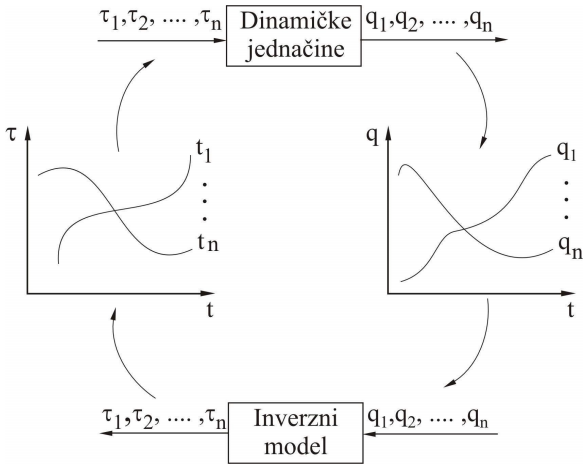
Елементи на главној дијагонали H_{ii} представљају инерцијалности које момент у i-том зглобу треба да савлада при сопственом убрзавању. Тако, на пример, H_{11} представља инерцијалност коју први зглоб при његовом кретању треба да савлада, али треба уочити да H_{11} зависи од положаја свих осталих сегмената који се у кинематском ланцу налазе даље (у овом случају од q_i, $i = 2 \ldots n$). Чланови H_{ij} који се налазе ван главне дијагонале, помножени са $\ddot{q}_j$ представљају допринос моменту i-тог зглоба услед кретања j-тог зглоба. На пример, H_{12} представља допринос моменту у првом зглобу услед кретања другог зглоба. Вектор $\mathbf{h}$ обједињује утицаје Кориолисових и центрифугалних сила, док $\mathbf{G}$ представља вектор момената услед гравитационих оптерећења.

6.2.2 Директни и инверзни задатак динамике и рекурзивни динамички модел

Слично као у случају кинематике, и у случају динамике се могу поставити два основна задатка: директни и инверзни динамички задатак ((6.12)).

Уколико су познати погонски моменти у зглобовима $\tau_1(t), \tau_2(t), \ldots, \tau_n(t)$ може се једнозначно одредити кретање механизма описано скупом генералисаних координата, рецимо, покретањима зглобова $q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)$. Овај задатак се назива директним динамичким проблемом.

Међутим, далеко је интересантнији и чешће заступљен задатак одређивања погонских момената $\tau_1(t), \tau_2(t) \ldots \tau_n(t)$ таквих да се оствари жељено кретање зглобова $q_1(t), q_2(t) \ldots q_n(t)$ а самим тим и жељено кретање хватаљке. Овај задатак се назива инверзним динамичким проблемом. Основу за практичну примену математичког метода за формирање динамичког модела на рачунару представља његово формирање у рекурзивној форми.



Слика 6.12: Директни и инверзни динамички проблем

Улазне величине неопходне за формирање динамичког модела су:

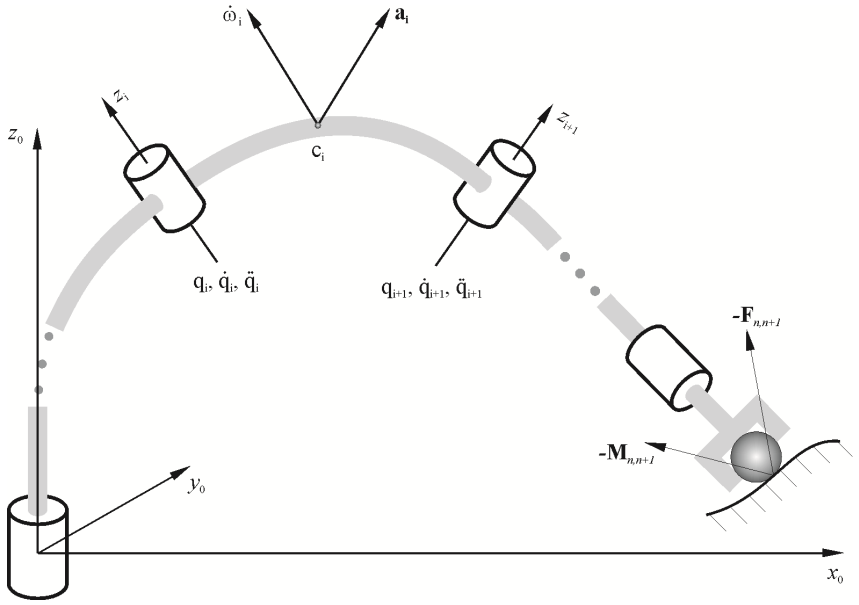
- Тип механичке конфигурације (врста и распоред зглобова),
- Кинематски и динамички параметри сегмената (дужине, масе, положаји тежишта свих сегмената, моменти инерције, ...). У случају да робот у хватаљци носи радни предмет, хватаљка се заједно са радним предметом сматра јединственим крутим телом па је потребно срачунати параметре "модификованог"последњег сегмента ($m = m_H + m_{RP}$).
- Решен инверзни кинематски задатак, тј. трајекторије свих унутрашњих координата, брзина и убрзања дуж читавог разматраног покрета.
- Подаци о брзини и убрзању базног сегмента. Уколико је робот причвршћен за тло те величине су једнаке нули, а уколико није потребно их је специфицирати.

Алгоритам треба тако дефинисати да се сви параметри механизма задају у "локалном"координатном систему везаном за сегмент. Сва потребна прерачунавања која зависе од његовог тренутног положаја у односу на базни координатни систем треба да се обављају аутоматски. На сл. 6.13

је илустрован рекурзивни рачунарски алгоритам за формирање динамичког модела на бази Њутн-Ојлерових једначина.

Процедура формирања динамичког модела се одвија у две фазе. У првој се одређују све кинематске величине (линеарне и угаоне брзине и убрзања тежишта свих сегмената кинематског ланца) потребне за формирање Њутн-Ојлерових једначина. Подсетимо да је инверзни кинематски задатак већ решен и да су познате трајекторије позиција, брзина и убрзања у свим зглобовима. Процедура почиње од првог сегмента. Пошто су познате тренутне вредности углова, угаоних брзина и убрзања у првом зглобу $(q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1)$ могу се одредити линеарне и угаоне брзине и убрзања тежишта $\mathbf{C}_1$.

Пошто је сада у потпуности познато кретање првог сегмента (поред кретања првог зглоба $(q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1)$ срачунате су и линеарна и угаона брзина и убрзање тежишта сегмента $\mathbf{v}_{C_1}$, $\boldsymbol{\omega}_1$, $\mathbf{a}_{C_1}$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$) прелази се на наредни сегмент, за који је у овом тренутку познато само кретање другог зглоба тј. $q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2$. С обзиром да је за други сегмент кретање првог сегмента преносно, а кретање другог сегмента у односу на први релативно, сада се могу одредити брзина и убрзање тежишта другог сегмента. Ова процедура се понавља од сегмента до сегмента док се не обиђе кинематски ланац у целости и стигне до последњег сегмента.



Слика 6.13: Рекурзивно формирање динамичког модела

На бази срачунатих кинематских величина свих сегмената, у другој фази се одређују потребни моменти у зглобовима. Међутим, сада се полази од последњег сегмента и дуж кинематског ланца се иде ка базном сегменту. Напишимо израз (6.28) за последњи (n-ти) сегмент у следећем облику

$$\mathbf{F}_{n-1,n} = \mathbf{F}_{n,n+1} + m_n \dot{\mathbf{v}}_{C_n} - m_n \mathbf{g} \tag{6.52}$$

Подсетимо се да $\mathbf{F}_{n,n+1}$ представља силу којом робот својим последњим сегментом (хватаљком) делује на околину, $\dot{\mathbf{v}}_{C_n} = \mathbf{a}_{C_n}$ је убрзање тежишта n-тог сегмента које смо већ срачунали у претходној фази, док $\mathbf{g}$ представља вектор гравитационог убрзања. Напоменимо да сила којом робот делује на околину ($\mathbf{F}_{n,n+1}$) треба да буде специфицирана дуж читаве трајекторије која се разматра. Сада су све величине са десне стране једначине познате па можемо одредити непознату силу спрезања $\mathbf{F}_{n-1,n}$ између $n-1$-вог и n-тог сегмента.

Затим се прелази на наредни сегмент па се на исти начин одреди сила спрезања $\mathbf{F}_{n-2,n-1}$ између $n-2$-гог и $n-1$-вог сегмента.

Истим начином (на основу једначине (6.29)) можемо најпре одредити момент спрезања између $n-1$-вог и n-тог сегмента, а затим се, као у претходном случају, прелази на претходни сегмент и одређује момент $\mathbf{M}_{n-2,n-1}$ између $n-2$-гог и $n-1$-вог сегмента, и тако даље све до базног сегмента.

Према томе, рекурзивна процедура за срачунавање сила и момената у зглобовима механизма се базира на једначинама

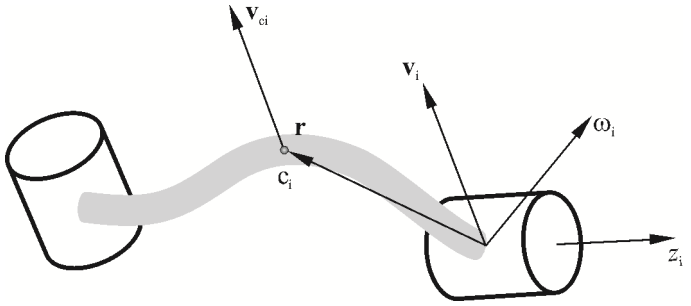
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i-1,i} &= \mathbf{F}_{i,i+1} + m_i \dot{\mathbf{v}}_{Ci} - m_i\,\mathbf{g} \\ \mathbf{M}_{i-1,i} &= \mathbf{M}_{i,i+1} - \mathbf{r}_{i.Ci} \times \mathbf{F}_{i,i+1} + \mathbf{r}_{i-1,Ci} \times \mathbf{F}_{i-1,i} + I_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i - \boldsymbol{\omega}_i \times (I_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i) \end{aligned} \tag{6.53}$$

идући од последњег ка првом сегменту.

Када су све силе $\mathbf{F}_{n-1,n}$ и моменти $\mathbf{M}_{n-1,n}$ одређени срачунавају се погонски моменти τ_i према (6.4) и (6.5). Важно је напоменути да приказана процедура важи само за један тренутак времена и да је треба понављати за сваки тренутак одабирања дуж посматраног покрета.

6.2.3 Алгоритам формирања динамичког модела

Да би објаснили рекурзивни алгоритам за формирање динамичког модела поновићемо неопходне кинематске релације у рекурзивној форми. Две основне врсте зглобова које се користе у кинематским ланцима манипулационих робота су ротациони и транслаторни (призматичан) са по једним степеном слободе.



Слика 6.14: Брзине у зглобу и тежишту сегмента

Размотримо прво једноставнији случај када је $u+1$-ви зглоб призматичан. С обзиром да линеарно кретање које генерише овај зглоб не узрокује промену

угаоне брзине и убрзања $u+1$-вог сегмента, важи

$$\boldsymbol{\omega}_{i+1} = \boldsymbol{\omega}_i, \ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \tag{6.54}$$

За брзине и убрзања важе релације

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{v}_i + \dot{q}_{i+1}\mathbf{z}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,i+1} \\ \mathbf{a}_{i+1} &= \mathbf{a}_i + \ddot{q}_{i+1}\mathbf{z}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_{i,i+1} + 2\boldsymbol{\omega}_i \times \dot{q}_{i+1}\mathbf{z}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \left(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,i+1}\right) \end{aligned} \tag{6.55}$$

Ако је $i+1$-ви зглоб ротациони он доприноси угаоној брзини и убрзању наредног сегмента па важи

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{i+1} &= \boldsymbol{\omega}_i + \dot{q}_{i+1}\mathbf{z}_i \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \ddot{q}_{i+1}\mathbf{z}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \dot{q}_{i+1}\mathbf{z}_i \end{aligned} \tag{6.56}$$

док за линеарне брзине и убрзања важи

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,i+1} \\ \mathbf{a}_{i+1} &= \mathbf{a}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} \times \mathbf{r}_{i,i+1} + \boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \mathbf{r}_{i,i+1}\right) \end{aligned} \tag{6.57}$$

Треба напоменути да су Њутн-Ојлерове једначине изражене у односу на убрзања тежишта (види једначине (6.53)), док су горњи рекурзивни изрази изражени у односу на координатне системе који се налазе на сваком од сегмената (према ДХ нотацији њихови координатни почеци се налазе на осама зглобова). На сл. 6.14 су приказане линеарна $\mathbf{v}_i$ и угаона брзина $\boldsymbol{\omega}_i$ изражене у односу на локални координатни систем сегмента. Линеарна брзина и убрзање тежишта су тада дати са

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{Ci} &= \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,Ci} \\ \mathbf{a}_{Ci} &= \mathbf{a}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_{i,C1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \left(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,Ci}\right) \end{aligned} \tag{6.58}$$

На тај начин се могу одредити све величине неопходне за формирање динамичког модела манипулационог робота.

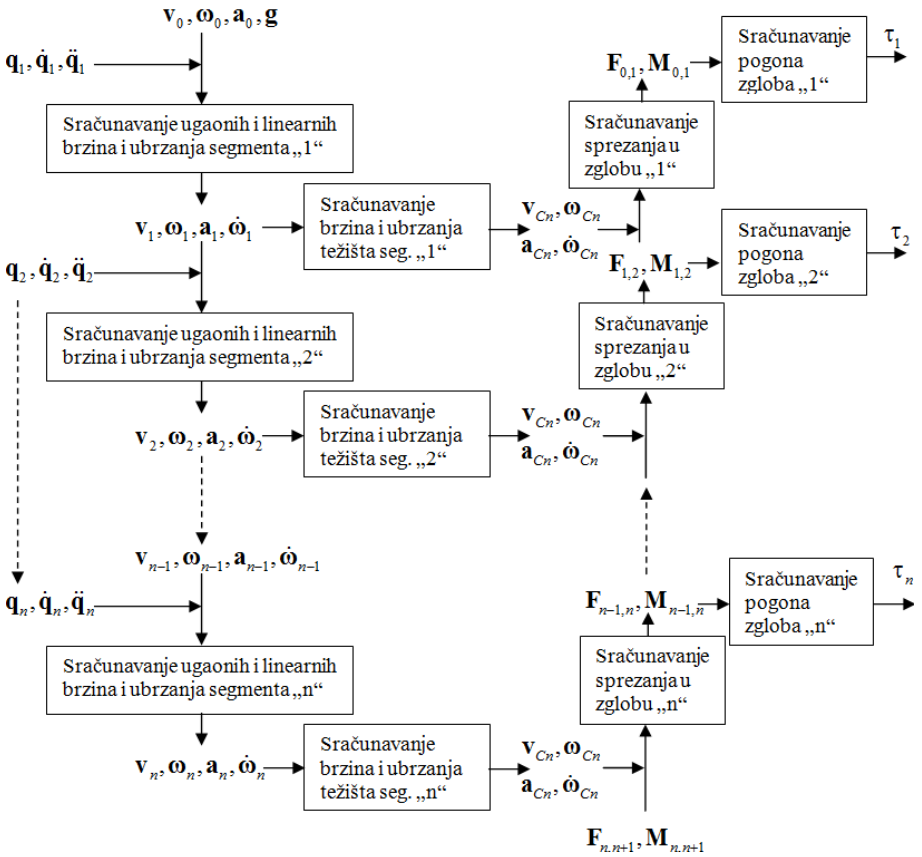
На сл. 6.15 је схематски приказан алгоритам за решавање задатка инверзне динамике и срачунавање погонских момената у зглобовима механизма. Претпоставља се да су сви подаци о механизму робота и трајекторији зглобова познати и задати.

Процес почиње учитавањем података о кретању базе робота (сегмент 0). Уколико је база робота непокретна њене брзине и убрзања су једнаки нули. Затим се, на основу информације о кретању зглоба 1 (q_1, $\dot{q}_1$, $\ddot{q}_1$) и на основу једначина (6.55), (6.56) и (6.57) срачунавају брзине и убрзања ($\mathbf{v}_1$, $\boldsymbol{\omega}_1$, $\mathbf{a}_1$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$) сегмента 1, тј. њему припадајућег координатног система. Ове информације се прослеђују даље, па се на основу ових података и информација о кретању зглоба 2 (q_2, $\dot{q}_2$, $\ddot{q}_2$) срачунава кретање сегмента 2 ($\mathbf{v}_2$, $\boldsymbol{\omega}_2$, $\mathbf{a}_2$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$). Процедура се наставља даље, све док се не стигне до последњег сегмента у кинематском ланцу. У сваком кораку се додатно, чим се подаци о кретању i-тог сегмента срачунају ($\mathbf{v}_i$, $\boldsymbol{\omega}_i$, $\mathbf{a}_i$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$), на основу једначине (6.58) срачунају и брзине и убрзања његовог тежишта ($\mathbf{v}_{C_i}$, $\boldsymbol{\omega}_{C_i}$, $\mathbf{a}_{C_i}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{C_i}$) ради каснијег коришћења у алгоритму.

Пошто су кинематске величине за све сегменте срачунате, започиње се са срачунавањем потребних погонских момената у зглобовима механизма. Срачунавање полази, на основу једначине (6.53), од познате вредности силе и момента ($\mathbf{F}_{n,n+1}$, $\mathbf{M}_{n,n+1}$) којим последњи сегмент (хватаљка) робота делује на околину, а која следи из технолошких услова задатка. У случају да се робот креће слободним простором и да нема контакт са околином, $\mathbf{F}_{n,n+1}$ и $\mathbf{M}_{n,n+1}$ су једнаки нули. Затим се срачунавају силе и моменти спрезања у зглобовима $\mathbf{F}_{i,i+1}$ и $\mathbf{M}_{i,i+1}$ чијим пројектовањем на осу згоба (једначине (6.4) и (6.5)) добијамо погонски момент, тј. компоненту која мора да се уравнотежи дејством мотора у зглобу. Након одређених свих вредности сила и момената закључно са $\mathbf{M}_{0,1}$ и $\mathbf{M}_{0,1}$ могуће је израчунати погонске моменте τ_i за све зглобове робота.

6.2.4 Лагранжева формулација једначина кретања

Као што смо у претходном одељку показали, при формирању динамичких једначина Њутн-Ојлеровим формализмом, у једначинама се јављају реакције



Слика 6.15: Алгоритам срачунавања погонских момената

веза које треба елиминисати да би добили решење у затвореној форми. Алтернативни прилаз формирању динамичких једначина је Лагранжев формализам којим се описује понашање динамичког система преко рада и енергије коју систем поседује. Реакције веза система су аутоматски елиминисане и не појављују се у једначинама и решење се у затвореној форми добија на систематичан начин.

Нека су $q_1, \ldots, q_n$ генералисане координате којима се у потпуности дефинише систем. Ако са T и U означимо тоталну кинетичку и потенцијалну енергију коју систем поседује, тада израз

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T - U \tag{6.59}$$

дефинише Лагранжеву функцију или Лагранжијан, па су једначине кретања дате са

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i,\ i = 1, \ldots, n \tag{6.60}$$

где су Q_i генералисане силе које одговарају генералисаним координатама q_i.

Да би одредили кинетичку енергију i-тог сегмената роботског механизма потребно је да знамо векторе брзине $\mathbf{v}_{C_i}$ његовог тежишта C_i и векторе угаоне брзине сегмента $\boldsymbol{\omega}_i$ у односу на референтни непокретни координатни систем. Кинетичка енергија i-тог сегмента се тада може написати у форми

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{C_i}^T \mathbf{v}_{C_i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T I_i \boldsymbol{\omega}_i \tag{6.61}$$

где је m_i маса i-тог сегмента, а I_i тензор инерције у тежишту сегмента димензије 3×3 изражен у односу на референтни координатни систем. Први члан израза (6.61) се односи на кинетичку енетгију транслаторног кретања, а други на кинетичку енергију ротације око тежишта. С обзиром да су енергије адитивне, укупна кинетичка енергија система се добија сабирањем енергија коју поседују сви сегменти

$$T = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{T}_i \tag{6.62}$$

У горњим изразима кинетичка енергија је изражена у односу на брзину тежишта и угаону брзину сегмента које нису независно променљиве величине па их треба изразити у односу на комплетан скуп независних променљивих $\mathbf{q} = [q_1, \ldots, q_n]^T$. У једначинама (4.43), (4.44) и (4.45) је изражена линеарна и угаона брзина хватаљке преко брзина у зглобовима. Ако усвојимо исти прилаз можемо писати

$$\mathbf{v}_{C_i} = J_{L_1}^{(i)} \cdot \dot{q}_1 + J_{L_2}^{(i)} \cdot \dot{q}_2 + \cdots + J_{L_n}^{(i)} \cdot \dot{q}_n = \mathbf{J}_L^{(i)} \cdot \dot{\mathbf{q}} \tag{6.63}$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = J_{A_1}^{(i)} \cdot \dot{q}_1 + J_{A_2}^{(i)} \cdot \dot{q}_2 + \cdots + J_{A_n}^{(i)} \cdot \dot{q}_n = \mathbf{J}_A^{(i)} \cdot \dot{\mathbf{q}} \tag{6.64}$$

где су $\mathbf{J}_{L_j}^{(i)}$ и $\mathbf{J}_{A_j}^{(i)}$ делови j-те колоне јакобијана који одговарају "линеарном" и "угаоном" померању i-тог сегмента. Треба приметити да кретање i-тог сегмента зависи само од кретања сегмената 1 до i, а чланови после i-тог су

постављени на нулу, тј.

$$\mathbf{J}_L^{(i)} = \left[J_{L_1}^{(i)}, \ldots, J_{L_i}^{(i)}, 0 \ldots 0 \right] \tag{6.65}$$

$$\mathbf{J}_U^{(i)} = \left[J_{U_1}^{(i)}, \ldots, J_{U_i}^{(i)}, 0 \ldots 0 \right]. \tag{6.66}$$

На основу аналогије са једначинама (4.51) и (4.52) чланове јакобијана можемо срачунати из

$$\mathbf{J}_{L_j}^{(i)} = \begin{cases} \mathbf{z}_{j-1} & \text{за linearni zglob} \\ \mathbf{z}_{j-1} \times \mathbf{r}_{0,C_i} & \text{za rotacioni zglob} \end{cases} \tag{6.67}$$

$$\mathbf{J}_{U_j}^{(i)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{za linearni zglob} \\ \mathbf{z}_{j-1} & \text{za rotacioni zglob} \end{cases} \tag{6.68}$$

где је $\mathbf{r}_{0,C_i}$ вектор позиције тежишта i-тог сегмента у односу на референтни координатни систем док је $\mathbf{z}_{j-1}$ орт $(j-1)$-ве осе зглоба. Сменом (6.63) и (6.64) у (6.61) и (6.62) следи израз за кинетичку енергију

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_L^{(i)T} \mathbf{J}_L^{(i)} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_U^{(i)T} I_i \mathbf{J}_U^{(i)} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \mathbf{q} \tag{6.69}$$

где је $\mathbf{H}$ матрица димензије $n \times n$ која у себи садржи све масене карактеристике комплетног манипулационог робота и назива се матрицом инерције манипулатора,

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \mathbf{J}_L^{(i)T} \mathbf{J}_L^{(i)} + \mathbf{J}_U^{(i)T} I_i \mathbf{J}_U^{(i)} \right). \tag{6.70}$$

Тензор инерције манипулатора укључује Јакобијан па самим тим зависи од тренутне позе механизма тј. од $\mathbf{q} = [q_1, \ldots, q_n]^T$. Ако са H_{ij} обележимо $[i, j]$ компоненту тензора инерције манипулатора, једначину (6.62) за кинетичку енергију можемо написати као

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} H_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \tag{6.71}$$

Поред кинетичке енергије, за формирање Лагранжеве функције потребно је да се одреди и потенцијална енергија система U. Ако са $\mathbf{g}$ обележимо вектор гравитационог убрзања, а са $\mathbf{r}_{0,C_i}$ радијус вектор тежишта i-тог сегмента, потенцијална енергија система се може срачунати према изразу

$$U = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{0,C_i}. \tag{6.72}$$

Генералисане силе обухватају све силе и моменте који делују на систем осим гравитационих и инерцијалних. Посматрајмо ситуацију када у свим зглобовима делују моменти $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \ldots, \tau_n]^T$ док на хватаљку делује спољна

сила интеракције са околином $\mathbf{F}_{ext}$. Генерализане силе се могу добити срачунавањем виртуелног рада тих сила. Аналогно једначини (6.7) можемо писати

$$\delta \mathbf{w} = \boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q} + \mathbf{F}_{\text{ext}}^T \delta \mathbf{s} = \left(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}^T \mathbf{F}_{\text{ext}} \right)^T \delta \mathbf{q}. \tag{6.73}$$

Упоређивањем овог израза са изразом за виртуелни рад генерализаних сила $\mathbf{Q} = [Q_1, \ldots, Q_n]^T$ који је дат са

$$\delta \mathbf{w} = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} \tag{6.74}$$

можемо идентификовати генерализане силе као

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}^T \mathbf{F}_{\text{ext}}. \tag{6.75}$$

Формирајмо сада Лагранжеву функцију. Први члан у (6.60) се на основу (6.72) може написати у форми

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^{n} H_{ij} \dot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} H_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{dH_{ij}}{dt} \dot{q}_j \tag{6.76}$$

С обзиром да је H_{ij} функција генерализаних координата $\mathbf{q} = [q_1, \ldots, q_n]^T$ извод по времену се може одредити према

$$\frac{dH_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k. \tag{6.77}$$

Други члан у (6.60) се састоји од парцијалних извода кинетичке енергије који су дати са

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} H_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j \tag{6.78}$$

пошто H_{jk} зависи од q_i. Члан који се односи на гравитационе утицаје се може добити формирањем парцијалних извода потенцијалне енергије

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{0,C_i}}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{g}^T \mathbf{J}_{L_k}^{(i)} \tag{6.79}$$

с обзиром да су парцијални изводи вектора позиције $\mathbf{r}_{0,C_i}$ по генерализаним координатама исто што и k-та колона јакобијана $\mathbf{J}_{L_k}^{(i)}$ дефинисана изразима (6.63) - (6.66). Према томе, сада следи

$$\sum_{j=1}^{n} H_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} h_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + G_i = Q_i, \; i = 1, \ldots, n \tag{6.80}$$

где је

$$h_{ijk} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} \tag{6.81}$$

и

$$G_i = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{g}^T \mathbf{J}_{L_k}^{(i)}. \tag{6.82}$$

Први члан у (6.80) представља моменте инерцијалних сила, други члан обухвата Кориолисове и центрифугалне ефекте док последњи члан представља моменте гравитационих сила. Треба уочити да је израз (6.73) идентичан изразу (6.44) који је изведен на основу Њутн-Ојлерове формулације једначина кретања.

Пример 6.4.

Извести динамичке једначине кретања двосегментног раванског механизма са сл. 6.8. користећи Лагранжеве једначине друге врсте.

Ако пођемо од израза (6.36), брзине тежишта C_1 и C_2 сегмената 1 и 2 се могу, у функцији вектора брзина у зглобовима $\dot{\mathbf{q}}$, написати у форми

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{C_1} &= \begin{bmatrix} -l_{C_1}\sin q_1 & 0 \\ l_{C_1}\cos q_1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{v}_{C_2} &= \begin{bmatrix} -l_1\sin q_1 - l_{C_2}\sin(q_1+q_2) & -l_{C_2}\sin(q_1+q_2) \\ l_1\cos q_1 + l_{C_2}\cos(q_1+q_2) & l_{C_2}\cdot\cos(q_1+q_2) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \tag{6.83}$$

Упоређујући ове изразе са изразима (6.63) десне стране у изразима (6.83) се могу разумети као Јакобијеве матрице $\mathbf{J}_L^{(i)}$. Угаоне брзине које одговарају $\mathbf{J}_U^{(i)}$ у случају раванског механизма се могу написати као

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta}_1 = [1 \quad 0]\,\dot{\mathbf{q}} \\ \omega_2 &= \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 = [1 \quad 1]\,\dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \tag{6.84}$$

Замењујући горње изразе у (6.70) добијамо матрицу $\mathbf{H}$ у форми

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} m_1 l_{C_1}^2 + I_1 + m_2\left(l_1^2 + l_{C_2}^2 + 2l_1 l_{C_1}\cos\theta_2\right) + I_2 & m_2 l_1 l_{C_1}\cos\theta_2 + m_2 l_{C_2}^2 + I_2 \\ m_2 l_1 l_{C2}\cos\theta_2 + m_2 l_{C_2}^2 + I_2 & m_2 l_{C2} + I_2 \end{bmatrix} \tag{6.85}$$

на основу које можемо срачунати коефицијенте дефинисане са (6.81)

$$\begin{gathered} h_{111} = 0, \quad h_{122} = -m_2 l_1 l_{c2}\sin\theta_2, \quad h_{112} + h_{121} = -2m_2 l_1 l_{c2}\sin\theta_2, \\ h_{211} = m_2 l_1 l_{c2}\sin\theta_2, \quad h_{222} = 0, \quad h_{212} + h_{221} = 0 \end{gathered} \tag{6.86}$$

На овај начин су одређена прва два члана у изразу (6.80). Трећи члан, моменти услед гравитационих сила, се на основу (6.82) и коришћењем (6.83) могу написати у форми

$$\begin{aligned} G_1 &= \mathbf{g}^T \left[m_1 \mathbf{J}_{L1}^{(1)} + m_2 \mathbf{J}_{L1}^{(2)} \right] \\ G_2 &= \mathbf{g}^T \left[m_1 \mathbf{J}_{L2}^{(1)} + m_2 \mathbf{J}_{L2}^{(2)} \right]. \end{aligned} \tag{6.87}$$

Замењујући (6.85), (6.86) и (6.87) у (6.80) добијамо изразе за погонске моменте

$$\begin{aligned} \tau_1 &= H_{11}\ddot{q}_1 + H_{12} \cdot \ddot{q}_2 - h_{122}(\dot{q}_2)^2 - (h_{112} + h_{121}) \cdot \dot{q}_1 \dot{q}_2 + G_1 \\ \tau_2 &= H_{22}\ddot{q}_2 + H_{12}\ddot{q}_1 + h_{211} \cdot (\dot{q}_1)^2 + G_2 \end{aligned} \tag{6.88}$$

који су идентични са изразима (6.37) изведеним на бази Њутн-Ојлеровог формализма за дефинисање једначина кретања.

ЛИТЕРАТУРА

An C., Atkenson C, Hollerbach J., *Model-Based Control of a Robot Manipulator*, The MIT Press, 1998.

Angeles J., *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems - Theory, Methods and Algorithms*, Springer-Verlag, 2003.

Asada H., Slotine J.J., *Robot Analysis and Control*, John Wiley and sons, 1985.

Bruyninckx H., De Schutter J., *Introduction to Inteligent Robotics*, Katholieke Universteit Leuven, 2001.

Craig J., *Introduction to Robotics: Mechanics & Control,* Addison–Wesley, 1986.

Koren Y., *Robotics for Engineers*, McGraw-Hill, 1985.

Potkonjak V., *Robotika*, Naučna knjiga, 1989

Sciavicco L., Siciliano B., *Modeling and Control of Robot Manipulators*, McGraw-Hill, 1996.

Selig J.M., *Introductory Robotics*, Prentice – Hall, 1992.

Tsai Lung-Wen, *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*, John Wiley, 1999.

Vukobratović M., (u saradnji sa Đurović M., Hristić D., Karan B., Kirćanski M., Kirćanski N., Stokić D., Vujić D., Živković V.), *Uvod u robotiku*, Institut Mihajlo Pupin, Beograd, 1988.

Vukobratović M., *Primenjena dinamika manipulacionih robota*, Tehnička knjiga, Beograd, II dopunjeno i izmenjeno izdanje, Beograd, 1990

Vukobratović M., Stokić D., *Sinteza i algoritmi upravljanja manipulacionim robotima*, Institut Mihajlo Pupin, Beograd, 1981

Vukobratović M.,Potkonjak V, *Dinamika manipulacionih robota i aktivnih prostornih mehanizama*, Institut Mihajlo Pupin, Beograd, 1981

7. ОСНОВНИ ПОДСИСТЕМИ И КОМПОНЕНТЕ ИНДУСТРИЈСКИХ РОБОТА

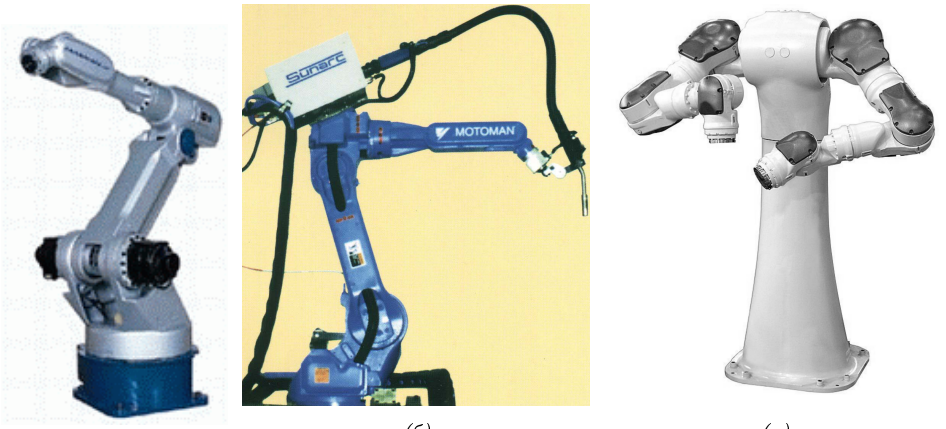
Основни подсистеми и компоненте који се могу срести код већине индустријских робота су:

- механичка структура (специфичности појединих конфигурација)
- погонски подсистем,
- сензорски подсистем,
- управљачки подсистем и
- алат и/или хватаљка.

Због веома широких тематских области сваке од поменутих ставки није их могуће у оквиру овог поглавља све детаљно обрадити, па ћемо се фокусирати само на неке, по нашем уверењу за читаоце интересантне, делове. С обзиром да је у Поглављу 2 већ обрађивана проблематика механичких конфигурација робота у овом делу ћемо се само осврнути на неке специфичности појединих конфигурација. Имајући на уму да су погонски системи широка област која се детаљно изучава у другим предметима, овде ће бити речи само о кочним системима за актуаторе који су уобичајени при пројектовању погона робота. Највише пажње ће бити посвећено системима за пренос снаге као и сензорском и управљачком подсистему. О хватаљкама овде неће бити речи, јер се хватаљке за сваки задатак посебно конструишу. У Поглављу 10, у којем се говори о применама робота, могу се видети примери различитих конструкција хватаљки и алата.

7.1 МЕХАНИЧКА КОНФИГУРАЦИЈА

Код индустријских робота најчешћа механичка конфигурација је облика једноструког кинематског ланца (сл. 7.1 а и б) код које се на сваком сегменту, осим на првом и последњем, налазе два зглоба за које су везани претходни и наредни сегмент. Међутим, треба имати у виду да се већ појављују конфигурације типа разгранатог кинематског ланца, као што је пример дворучног робота приказаног на сл. 7.1в. Код оваквих конфигурација се на неком од сегмената сустиче више кинематских ланаца и на том сегменту се налази више од два зглоба. У примеру са сл. 7.1в то је сегмент трупа на коме се налазе три зглоба и то: зглоб којим је труп повезан за основу и омогућава ротацију око вертикалне осе, и два зглоба којим су "руке"повезане са сегментом трупа. Поред повећаног степена антропоморфизма (што у случају радних места прилагођених човеку може бити од користи) овакав робот има повећану носивост јер се оптерећење при дворучној манипулацији дели на два кинематска ланца а спектар задатака које може да реализује се повећава јер се укључују задаци повећаног степена сложености чија реализација захтева две руке. Може се очекивати да због повећаног степена антропоморфности примена оваквих конфигурација неће бити ограничена само на индустријске задатке.



(а) *(б)* *(в)*

Слика 7.1: Индустријски роботи типа једноструког (а, б) и разгранатог кинематског ланца (ц)

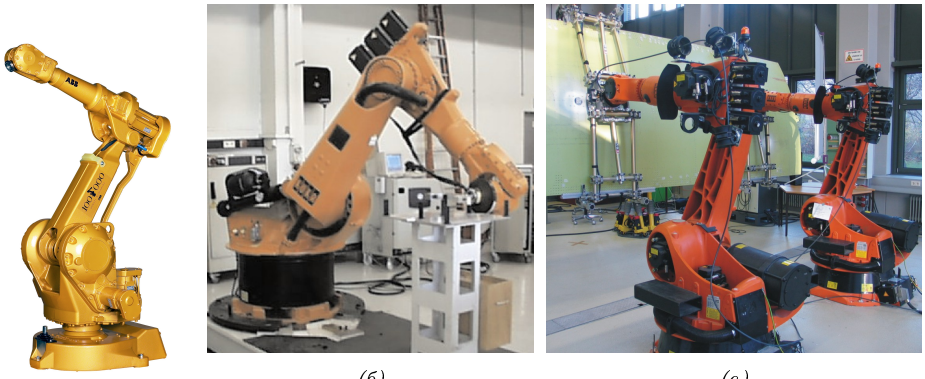
Основна карактеристика савремених индустријских робота се огледа у томе што је сваки зглоб механичке конфигурације оснажен "сопственим"актуатором[1]. Са друге стране, мада је конструкционо најједноставније није увек оправдано постављати моторе непосредно у зглобове кинематског ланца (поготово у оне који су ближе хватаљци) јер они својом тежином могу значајно увећавају оптерећење које треба да савладају мотори који су у кинематском ланцу ближе основи.

Стога је пожељно да се мотори изместе из зглобова који су удаљени од основе робота, и позиционирају што ближе вертикалној оси обртања како би момент инерције укупног система при ротацији око вертикалне осе био што мањи. На сл. 7.2а је приказан пример механичке конфигурације код које се трећи зглоб (лакат) покреће мотором преко преносне полуге, а који је смештен на првом сегменту и то веома близу вертикалној оси обртања. На сл. 7.2 б и ц су дати примери код којих се јасно види да су мотори за покретање зглоба хватаљке измештени "преко"трећег зглоба и да уједно служе као противтег којим се делимично уравнотежава трећи сегмент са зглобом хватаљке и хватаљка. Треба приметити да се на сличан начин на робота поставља и уређај за заваривање што се може видети на сл. 7.1б.

Треба напоменути да измештање мотора из зглобова минималне конфигурације досада није практиковано само код робота СЦАРА конфигурације (видети сл. 2.11) због тога што гравитационо оптерећење у зглобовима механичке структуре услед тежине мотора није потребно компензовати погонским моментима мотора, већ га уравнотежава (прима на себе) сама механичка структура.

Код робота пројектованих само за уске класе задатака механичка решења

[1]Једино код специјализованих конфигурација које су развијене за веома уске класе задатака (нпр. код робота за палетизацију) којима одговарају посебна решења сви зглобови нису оснажени "сопственим"актуаторима.



(а) (б) (в)

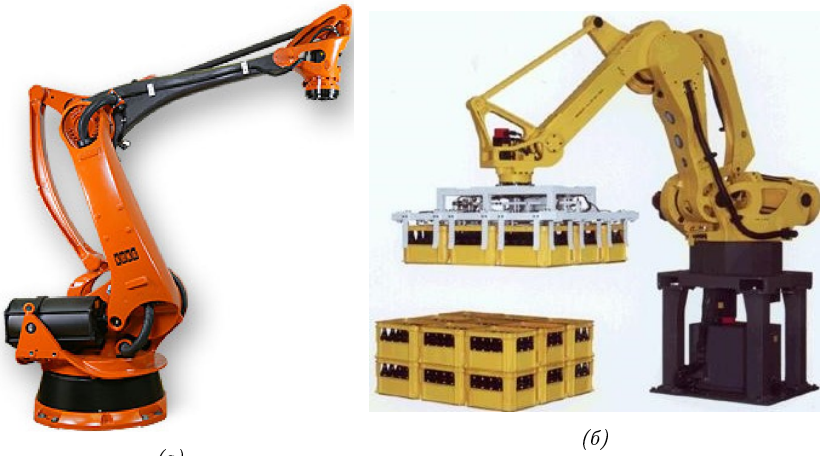
Слика 7.2: Примери измештања мотора из зглоба који покреће: а) покретање трећег зглоба преко преносне полуге док је мотор смештен на првом сегменту што ближе оси обртања, б) и ц) измештање мотора који покрећу зглоб хватаљке иза осе обртања трећег зглоба. Ови мотори уједно имају функцију противтега којим се делимично уравнотежава трећи сегмент, зглоб хватаљке, хватаљка и терет који робот преноси.

се могу потпуно прилагодити специфичним захтевима чиме се постижу додатни ефекти као што је нпр. уштеда енергије или значајно поједностављење управљања при реализацији задатка. Тако је, нпр. код робота за палетирање неопходно да је последња оса зглоба хватаљке управна на хоризонталну раван при хватању предмета рада и при њиховом одлагању. Пошто се терет у вертикалној равни само транслира потрошња енергије је смањена, а управљање роботом је поједностављено.

Стога вертикалност последње осе зглоба хватаљке, код робота за ову класу задатака, није остварена посебним мотором већ је обезбеђена системом полуга, што се јасно може видети на сл. 7.3 Треба приметити да је оса последњег сегмента зглоба хватаљке вертикална током читавог покрета тако да се предмет који робот преноси не ротира око хоризонталних оса.

7.2 РЕДУКТОРИ И КОНВЕРЗИЈА РОТАЦИОНОГ У ТРАНСЛАТОРНО КРЕТАЊЕ

У савременој индустријској роботици се као актуатори доминантно користе електромотори. При њиховом коришћењу се сусрећемо са два проблема који захтевају посебна решења. Електромотори имају далеко већи број обртаја а знатно мањи погонски момент од потребног за погон индустријских робота. Да би се тај проблем превазишао између мотора и сегмента који мотор покреће се постављају посебни уређаји, редуктори, којима се смањује број обртаја при чему се погонски момент повећава. Други проблем представља погон транслаторних (линеарних) зглобова електричним моторима при чему је потребно конвертовати ротационо у линеарно кретање. У овом одељку ће бити приказана решења која се најчешће користе у оба случаја.



(а) (б)

Слика 7.3: Примери робота за палетизацију.

7.2.1 Редуктори

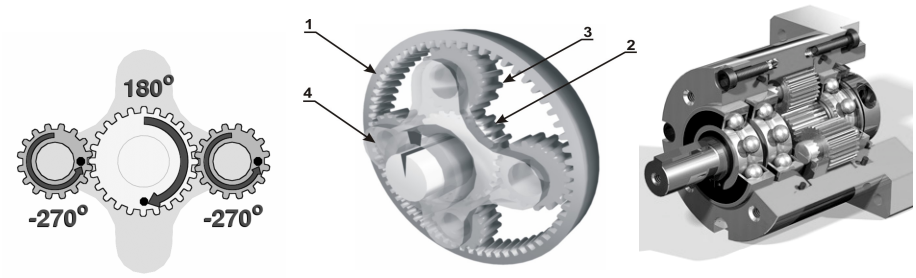
Редуктори су механички преносници који преносе механичку енергију од излазног вратила погонске машине (електромотора) до уређаја којем се ова енергија предаје (у овом случају до зглоба робота) при чему се број обртаја смањује, а обртни момент повећава. Код реализације индустријских робота се најчешће срећу зупчасти редуктори и то планетни и таласни. У даљем тексту биће изложене основне карактеристике ова два типа редуктора. С обзиром да је основна карактеристика сваког редуктора (и преносника уопште) преносни однос кратко ћемо се осврнути и на проблематику његовог одређивања.

Планетарни редуктори

Планетни редуктори (сл. 7.4 и 7.5) се у роботици користе веома често. Састоје се од система зупчаника са спољашњим озубљењем и спољашњег прстена са унутрашњим озубљењем (обележен бројем 1 на сл. 7.4). Централни зупчаник (обележен бројем 2 на сл. 7.4) је спрегнут са неколико зупчаника који се крећу око њега и називају се сателитима. Сви сателити имају исти број зубаца и обележени су бројем 3 на сл. 7.4. Бројем 4 је означена кривања или носач сателита. Централни зупчаник се у литератури на енглеском језику назива сунцем, а сателити планетама.

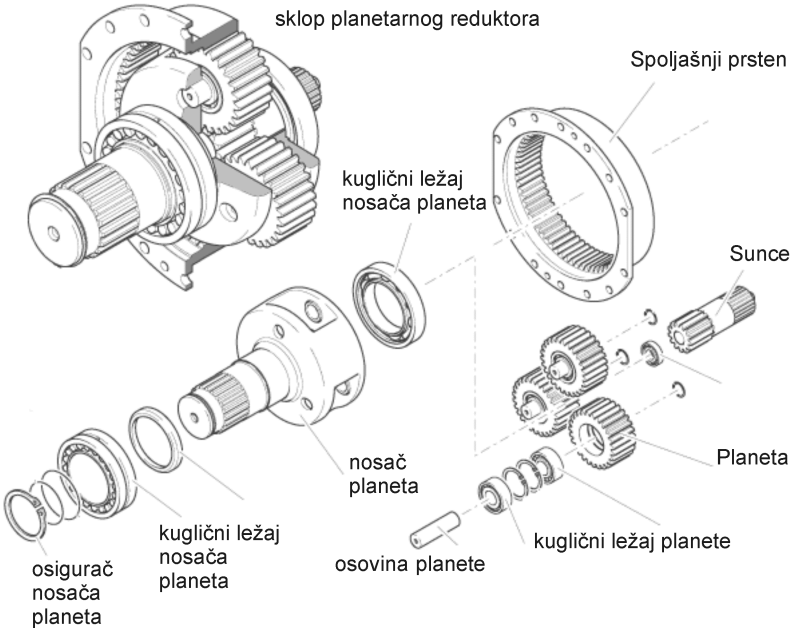
Кућиште (спољашњи прстен) је озубљено са унутрашње стране. Зупци на централном зупчанику, сателитима и на унутрашњој страни спољашњег прстена су истоветни, али број зуба није. Број зуба појединих зупчаника у оквиру једног планетног редуктора мора да задовољава релацију $n_S + 2n_P = n_{SP}$ где су n_S, n_P и n_{SP} број зубаца централног зупчаника, сателита, и спољашњег прстена, респективно.

Уобичајени начин примене планетног редуктора подразумева директно повезивање погонске осовине мотора на централни зупчаник, који у том случају постаје основни погонски зупчаник редуктора. Он се директно спреже



(а) *(б)* *(в)*

Слика 7.4: Планетарни зупчаници: скица, просторни модел и склоп.



Слика 7.5: Изглед растављеног и монтираног планетарног редуктора.

са сателитима који се истовремено спрежу и са спољашњим прстеном. Према томе, сателити ротирају око своје осе и истовремено круже око централног зупчаника. Зависно од конструктивног решења излазно кретање може бити: а) ротација кривиље тј. носача сателита (4) при чему је спољашњи прстен непокретан, или б) обртање спољашњег прстена (1) при чему је кривиља непокретна. У сваком од ових случајева преносни однос редуктора је другачији.

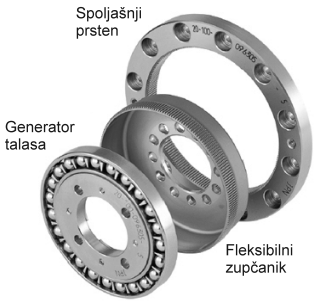
Претпоставимо да је носач сателита непокретан, док је централни зупчаник погонски. Тада зупчаници сателити ротирају око својих оса у складу са односом бројева зубаца централног зупчаника и сателита. Када се централни зупчаник окрене једном, сателити се окрену n_P/n_S пута. Када се сателити

окрену једном, спољашњи прстен се окрене n_P/n_{SP} пута. Ако је носач сателита непокретан, онда један обртај централног зупчаника произведе n_S/n_{SP} обртаја спољашњег прстена.

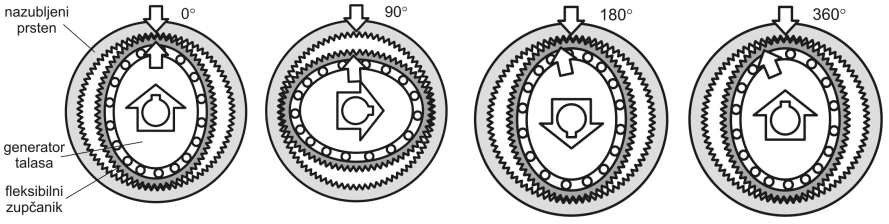
Ако је спољашњи прстен непокретан, нпр. учвршћен за кућиште мотора, носач сателита је излазни елеменат, па се он спреже са излазном осовином. Према томе, за један обртај централног зупчаника, излазно вратило (носач сателита) ће се обрнути $(n_S + n_{SP})/n_S$ пута. Уобичајено је да се више оваквих склопова постави у низу (излаз из једног степена представља улаз у наредни), повећавајући тако укупни преносни однос редуктора који је једнак производу преносних односа појединачних степени. Планетни редуктори се користе веома често, због малих димензија у односу на снагу коју могу да пренесу, великих преносних односа (до 10000), великих улазних брзина, као и релативно ниске цене у односу на неке друге типове редуктора.

Таласни редуктори

Таласни редуктор (енгл. хармониц дриве) сл. 7.6 чине три основна дела: елиптични генератор таласа, еластични зупчаник и крути кружни прстен са унутрашњим озубљењем. Зупци на еластичном зупчанику и озубљеном кружном прстену се спрежу, при чему кружни прстен има свега неколико зубаца више од еластичног зупчаника. За улазно вратило је спојен генератор таласа док је еластични зупчаник повезан са излазним вратилом.



Слика 7.6: Склоп таласног редуктора: улазна осовина повезује се на генератор таласа а излазна осовина на флексибилни зупчаник.



Слика 7.7: Илустрација рада таласног редуктора.

Принцип рада таласног редуктора је скициран на сл. 7.7. Ротацијом генератора таласа еластични зупчаник се деформише и зупце који се тренутно

налазе на великој полуоси генератора таласа утискује у озубљени кружни прстен. Обртањем за пун круг генератора таласа сви зупци еластичног зупчаника бивају утиснути у непомични озубљени кружни прстен, али при том еластични зупчаник није достигао претходни положај у односу на кружни прстен јер еластични зупчаник има неколико зубаца мање (1 или 2 зупца) од кружног прстена. Преме томе, при пуном окрету улазног вратила излазно вратило се обрне уназад за величину угла која је одговарала разлици броја зубаца.

Карактеристике таласног преносника омогућавају да се у само једном степену остваре преносни односи од 30:1 па до 320:1. Овакви редуктори су нарочито погодни уколико је расположиви простор ограничен. Таласни редуктори уобичајено износе трећину величине и половину тежине конвенционалних редуктора, за исти степен редукције и снагу.

Посебно је важно напоменунти да ови редуктори могу да пренесу релативно велике снаге уколико се пројектују тако да велики број зубаца буде у захвату, често и 30% од броја зубаца на генератору таласа. Клизање између зубаца је минимално што се одражава високим степеном искоришћења механичке енергије доведене редуктору. Коначно, таласни редуктори су врло тихи и имају низак степен вибрација. Централни део таласног редуктора је еластичан што при великим оптерећењима долази до изражаја, директно снижавајући природну фреквенцију осциловања целог погона. При малим излазним моментима, као и при малим брзинама и устаљеном кретању, еластичност не ствара проблеме.

Избор преносног односа редуктора

Поред избора типа редуктора прво питање које се намеће при пројектовању погона робота се односи на избор степена редукције редуктора. Најједноставнији поступак избора редуктора је директно усклађивање брзине мотора и гоњеног елемента, уз претпоставку да је већ одлучено који ће се мотор користити. За већ одабрани мотор према потребној снази и оквирној процени максималне брзине, познавајући максималну брзину мотора као и максималну потребну брзину кретања зглоба робота, најједноставније решење је да се одабере онај преносни однос редуктора који максималну брзину мотора своди на максималну захтевану брзину кретања зглоба робота. Тиме се у великој мери (са квадратом преносног односа редуктора) смањује утицај инерције оптерећења која се пресликава на осовину мотора. У идеалном случају, те две инерције (инерција ротора мотора и редукована инерција оптерећења) треба да буду једнаке јер динамичке карактеристике мотора треба да одговарају захтеваној динамици кретања сегмента. У пракси се толерише и до четири пута већа редукована инерција оптерећења.

Други, нешто сложенији, начин је да се одабере фамилија мотора из каталога према снази, а да се конкретан мотор одабере према максималним брзинама са најбоље могуће усклађеним моментом инерције.

Погледајмо сада како треба одабрати мотор да би он могао да покреће оптерећење са максимално захтеваним убрзањем. Моменат који мотор мора

да оствари је дат са

$$\tau_M = \left(J_M + \frac{J_L}{N^2}\right) \cdot \alpha_M$$

где су: τ_M, J_M, J_L, N, α_N погонски моменат мотора, инерција ротора мотора, инерција оптерећења, преносни однос редуктора, и убрзање ротора мотора, респективно. Треба приметити да је овде трење занемарено. Преносни однос је дефинисан као однос брзина обртања вратила мотора и вратила оптерећења (тј. $N > 1$). Потребно убрзање мотора је дато изразом $\alpha_M = \alpha_L \cdot N$, где је α_L убрзање оптерећења. Одавде се може срачунати α_L:

$$\alpha_L = \frac{\tau_M \cdot N}{J_M \cdot N^2 + J_L}.$$

Парцијални извод овог израза по преносном односу даје

$$\frac{\partial \alpha_L}{\partial N} = \frac{\tau_M \cdot \left(J_L - J_M N^2\right)}{\left(J_M \cdot N^2 + J_L\right)^2}.$$

Уколико горњи израз изједначимо са нулом добија се максимум убрзања у функцији преносног односа редуктора

$$0 = J_L - J_M N^2,$$

одакле следи тражени преносни однос

$$N = \sqrt{\frac{J_L}{J_M}}.$$

Међутим, у неким применама исувише велики потребан преносни однос редуктора доводи до неколико проблема. Прво, редуктор има ограничење по максималној улазној брзини. Често се догађа да је максимално дозвољена улазна брзина и двоструко мања од максималне брзине мотора. То поготово важи за пужне редукторе који, да би се постигло упаривање инерције, захтевају додатни редуктор. То је обично планетни редуктор јер дозвољава веће брзине, али са веома малим степеном редукције (нпр. 2:1) који се поставља само са циљем прилагођавања улазне брзине обртања пужном редуктору. Други проблем се огледа у томе што се са повећавањем преносног односа редуктора повећава и његова инерција која понекад може достићи и трећину инерције мотора. То већ представља озбиљан проблем. Није занемарљива ни чињеница да се повећавањем преносног односа, нпр. код планетних редуктора, са сваким додатним сетом планета, повећавају зазор и еластичност који представљају нелинеарне ефекте који су веома неповољни. Тиме се, опет, враћамо на почетак уз закључак да је некада боље оставити извесну неусклађеност инерција коју ће кориговати правилно подешен управљачки систем. Та неусклађеност ће се манифестовати при врло брзим покретима, што се, опет, може избећи правилним пла нирањем кретања. Генерално говорећи, редукована инерција оптерећења не треба да буде већа од четвороструке вредности инерције ротора мотора.

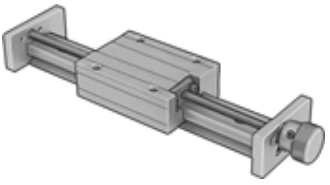
Према томе, правилан избор редуктора представља сложен задатак. Многи призвођачи имају развијене софтверске алате за правилан избор мотора и редуктора из њиховог производног програма. Преносни односи који се најчешће срећу у роботици су око 100:1.

7.2.2 Конверзија ротационог у транслаторно кретање

Поред равног цилиндричног зупчастог пара (зупчаник и зупчаста летва, енгл. пинион анд рацк) који је погодан за пренос релативно малих снага, за претварање ротационог у транслаторно кретање се најчешће користи навојно вретено са навртком. Навртка уобичајено има погодан облик и данас се скоро искључиво користе рециркулационе навртке са куглицама (сл. 7.8 и 7.9) због смањеног трења и дужег века трајања. Обртањем навојног вретена за један обрт навртка се помера аксијално за један корак завојнице. При томе је неопходно да се спречи обртање навртке. Комерцијално је могуће набавити цео склоп који је приказан на сл. 7.9. Поред навојног вретена и навртке, систем чине и две или више вођица које примају оптерећење. Мотор се поставља тако да се кућиштем повезује на носаче вођица, а излазна осовина мотора се спојницом повезује са вретеном. Навојно вретено, својим кораком одређује преносни однос ротационог у линеарно кретање. Што је корак навојног вретена мањи редукција је већа и самокочивост навоја више долази до изражаја.



Слика 7.8: Пресек рециркулационе навртке



Слика 7.9: Комплетан склоп навојног вретена и навртке са вођицама и мотором.

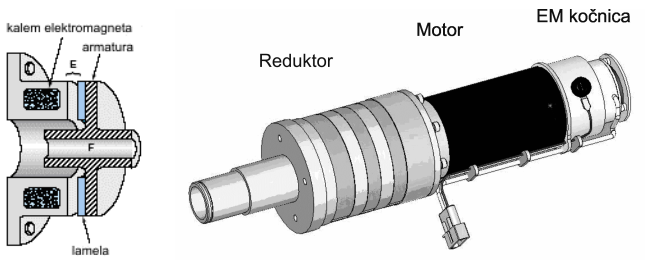
Једна од првих примена оваквог система трансмисије била је код првих генерација робота произвођача ACEA (сл. 7.13). Наиме, мотори за покретање другог и трећег зглоба су били повезани са другим односно трећим сегментом робота преко одвојених навојних вретена. Управо је овде самокочивост искоришћена да се очува положај робота и када нема напајања. Потом, код свих робота СЦАРА конфигурације трећи, транслаторни, зглоб минималне конфигурације се покреће управо преко навојних вретена са рециркулацијом куглица. Коначно, нека старија решења хватаљки имају паралелограмску структуру при чему се ротационо кретање мотора претвара у транслаторно кретање прстију хватаљке управо на овај начин. Код новијих конструкција робота се овај начин конверзије кретања мање користи.

7.3 КОЧНИЦЕ

Електромагнетне кочнице (сл. 7.10) су стандардни део опреме индустријских робота. Њихова основна намена је да зауставе кретање зглоба конвертовањем кинетичке енергије у термичку, путем кочионих плочица или дискова. Кочионе површине су од материјала са великим коефицијентом

трења, велике чврстине и добрих термичких својстава. Начелно се разликују два решења:

- кочење се обавља када је доведена електрична енергија или
- кочење се обавља када нема електричне енергије.



Слика 7.10: Пресек електромагнетне кочнице, и приказ мотора са кочницом и редуктором.

Време активације кочнице је коначно и мора се узети у обзир када се планира безбедносна процедура. Кочнице које се користе код робота су држећег (енг. холдон) типа и користе се само у два случаја: да обезбеде одржање положаја робота када дође до намерног или случајног прекида напајања, и да обезбеде тренутни прекид рада када се за то стекну услови као што је нпр. излазак изван граница радног опсега, или када се неким од спољашњих безбедносних прекидача наложи хитан престанак рада.

Најчешће се користе електромагнетне кочнице са сталним магнетима. Ове кочнице имају два кочиона диска, од којих се један везује за кућиште кочнице, а други за осовину чије кретање треба зауставити. Када нема напајања, дискови су притиснути опругом и привучени магнетима. Под напајањем, електромагнет привлачи котву савладавајући силе опруге и магнета. Тиме се дозвољава релативно кретање једног диска у односу на други. Кочница се поставља на мотор на супротној страни од редуктора. Један део кочнице се круто везује за вратило ротора, а други за статор мотора. Најчешће реализације су такве да је кочница у закоченом стању када нема напајања. То значи да када дође до прекида напајања, ротор мотора кочи и не дозвољава се његово обртање.

Момент држања кочнице зависи од силе опруге којом се ламеле притискају уз дискове као и од коефицијента трења међу њима. Проблем са оваквим кочницама је што се брзо потроше, уколико се често користе. Осим тога, моменат држања опада са повећањем температуре услед загревања, па се мора обезбедити добро хлађење. Треба обратити пажњу и на то да цена кочница може достићи и 50% цене мотора. Код мањих мотора, кочење је могуће остварити краткоспајањем контакта ротора директно преко релеја, или преко посебно пројектованих електронских кола.

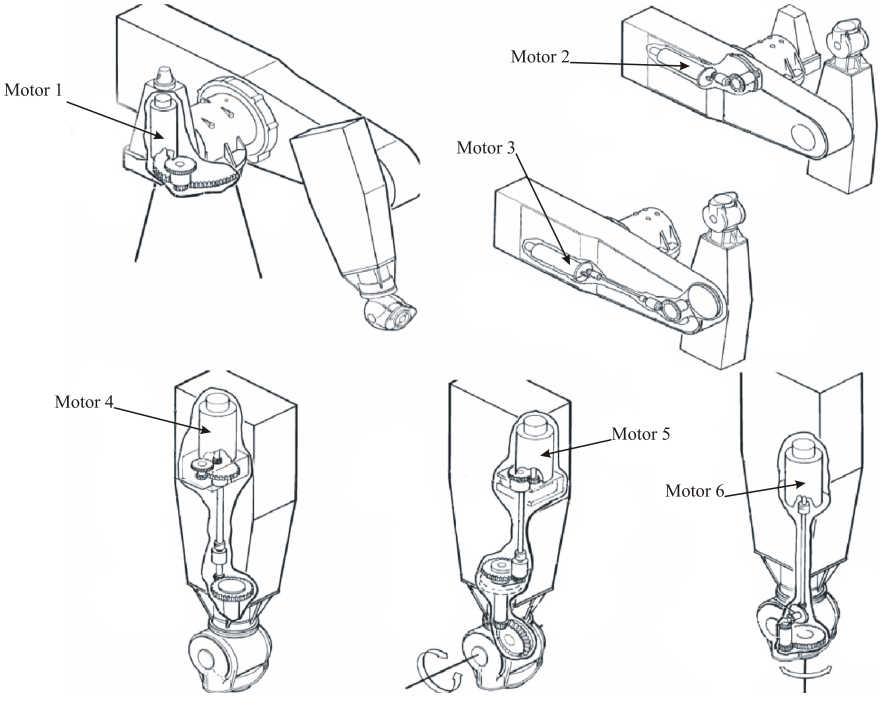
7.4 ПРИМЕРИ ТРАНСМИСИЈЕ У ИНДУСТРИЈСКОЈ РОБОТИЦИ

Мотори као и њихови редуктори су веома често релативно великих маса и запремина. Они би значајно оптерећивали погонски систем робота

и умањивали његове перформансе уколико би били монтирани директно у зглобовима које оснажују. Због тога се измештају изван зглобова, по правилу што ближе основи и вертикалној оси обртања првог зглоба. У појединим случајевима мотори се могу тако изместити да доприносе статичком уравнотежењу појединих сегмената.

Прва два веома позната и често коришћена робота, ПУМА560 и АСЕА ИРБ-6, су утицали на конструкторе наредних генерација. Осим тога, ПУМА 560 је у првим деценијама развоја роботике био веома често стандардни лабораторијски и истраживачки робот па је и највећи број раних научних радова имао управо тај робот као експерименталну основу. Стога ће, најпре, бити описан систем трансмисије робота ПУМА 560 (сл. 7.11).

Пренос снаге од излазног вратила редуктора до зглоба ћемо звати секундарном трансмисијом док ћемо пренос снаге кроз редуктор звати примарном трансмисијом. Мотор којим је оснажен први зглоб робота ПУМА 560, налази се на првом сегменту и преко два пара зупчаника обезбеђује потребан преносни однос.



Слика 7.11: Пример система секундарне трансмисије код робота ПУМА 760.

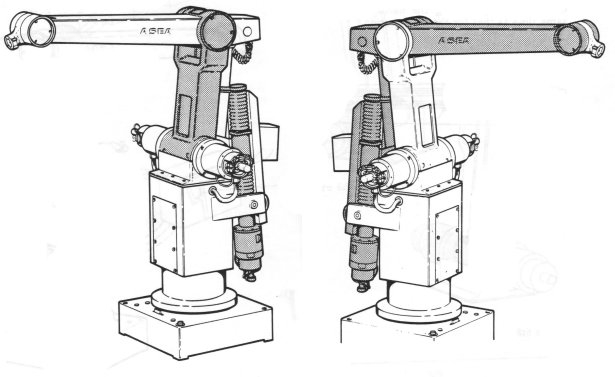
Мотори 2 и 3 налазе се у надлактици (сегмент 2) и постављени су иза вертикалне осе робота, делимично уравнотежавајући други сегмент. Постављени су међусобно паралелно, при чему је дејство другог мотора остварено путем пара коничних зупчаника и практично непосредно доведено на други зглоб. Трећи мотор је дугим вратилом које се протеже дуж сегмента спојен

са трећим зглобом. I у овом случају се кретање са мотора на зглоб преноси паром коничних зупчаника.

Мотори којима су оснажени четврти и пети степен слободе (зглоб хватаљке) су на сличан начин као у претходном случају постављени међусобно паралелно у задњем делу подлактице робота (сегмент 3). Четврти мотор оснажује први степен слободе зглоба хватаљке (ротација око уздужне осе сегмента), док пети мотор оснажује други степен слободе зглоба хватаљке (ротација око осе нормалне на уздужну осу сегмента). На сличан начин се покреће и шести степен слободе, што је јасно приказано на сл. 7.11.

Код робота АСЕА ИРБ-6, сл. 7.12, реализација погона је значајно другачија, чиме је постигнута већа носивост, у односу на укупну масу робота. Сва четири мотора, од другог до петог, налазе се практично на основи, изван тела робота. Мотор првог степена слободе се налази у унутрашњости првог сегмента. Тиме се постиже велико растерећење целе конструкције (мотори се не налазе на сегментима који реализују сложена кретања у радном простору) па је корисна носивост већа. Осим тога, сама конструкција је била таква да су производња, монтажа и одржавање самог робота били релативно једноставни.

Наиме, други и трећи мотор су својим кућиштима били ослоњени на први сегмент робота при чему се трансмисија са ротора на конструкцију обављала навојним вретенима. Навојно вретено другог мотора помера други сегмент, а навојно вретено трећег мотора, преко полуге, помера трећи сегмент.



Слика 7.12: Распоред мотора код робота АСЕА ИРБ6 за оснаживање 2. и 3. зглоба.

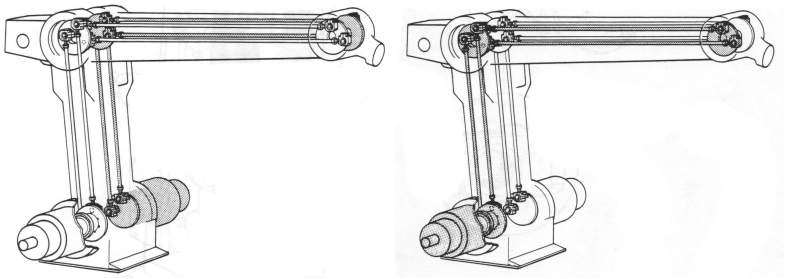
Концепт трансмисије кретања са трећег мотора који се налази на првом сегменту као носачу увођењем полуге представљао је посебно важан помак у конструкцији робота и до данас је остао незнатно модификован. Практично сви роботи антропоморфног типа осим најмањих, користе полугу за пренос снаге, постављену паралелно са другим сегментом. Тиме се остварује паралелограмска структура чиме је кретање у трећем зглобу једнако збиру кретања другог и трећег мотора.

Увођење полуге је моделирање кинематике и динамике (једноструки кинематски ланац добија додатне затворене петље) учинило сложенијим, појавили су се додатни извори нетачности због појаве зазора и повећања еластичности у

трећем зглобу, а додатно је отежано и мерење позиције трећег зглоба пошто је енкодер удаљен од зглоба. Међутим, побољшања која су овим конструкционим решењем добијена су била толико значајна да је такво решење остало и до данас у употреби.

Четврти и пети мотор су причвршћени на први сегмент а њихова кретања се преко два паралелограмска механизма преносе до четвртог и петог зглоба кроз унутрашњост сегмената, сл. 7.13. Шести степен слободе је за овај робот био опциони модул и на овој слици није приказан.

Заједничка карактеристика већине конструкција антропоморфних робота од првих генерација па све до савремених решења је да су се мотори другог и трећег зглоба увек постављали тако да су својим кућиштима били ослоњени о први сегмент. При томе су коришћена различита решења преноса снаге са другог мотора на други зглоб а, посебно су интересантна решења преноса снаге са трећег мотора на трећи зглоб. Мотори за оснаживање четвртог и петог (а понекад и шестог) зглоба најчешће се налазиле у сегменту подлактице робота, док се мотор за оснаживање шестог степена слободе могао наћи и на врху робота, у зглобу шаке.

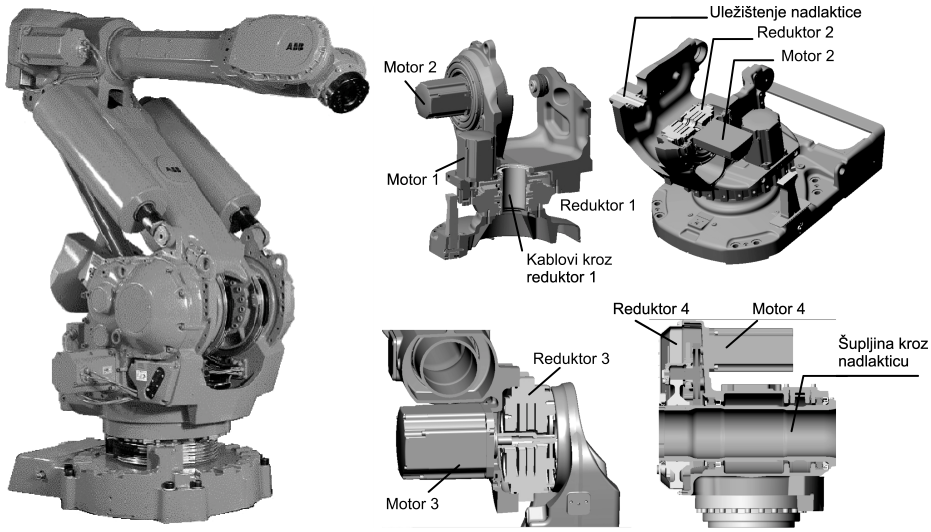


Слика 7.13: Паралелограмска структура за трансмисију снаге до 4. и 5. зглоба.

Размотримо основне елементе савремене конструкције једног индустријског робота. На сл. 7.14 приказан је пресек склопа прва четири зглоба робота АББ ИРБ6400. Мотор за погон првог зглоба са редуктором је уграђен у основу. Редуктор има пролазну осовину кроз коју се могу поставити потребни каблови за напајање мотора, као и за сензоре осталих зглобова. Мотор за погон другог зглоба је постављен тако да је редуктор директно повезан на вратило зглоба. Мотор за погон осе трећег зглоба је постављен симетрично мотору другог зглоба и паралелограмским механизмом погони трећи зглоб. Мотор и редуктор четвртог зглоба су постављени паралелно са сегментом подлактице чиме је омогућено повећање опсега кретања трећег зглоба што директно утиче на величину и облик радног простора.

7.5 СЕНЗОРИ У ИНДУСТРИЈСКОЈ РОБОТИЦИ

Примена сензора код савремених индустријских робота је још увек веома оскудна. Стандардно се једино уграђују сензори за мерење позиције сваког зглоба. Међутим, у роботски систем је могуће укључити додатне сензоре, пре свега роботску визију и сензоре за мерење интензитета и правца силе (или момента) који се јављају на контакту радног предмета (који држи хватаљка) са околином.



Слика 7.14: Изглед сегмената и распоред мотора и редуктора савременог индустријског робота АББ ИРБ6400.

За мерење позиције у зглобовима робота могу се користити уређаји који дају информацију о њеној апсолутној вредности или о њеној промени током кретања. Први се називају апсолутним а други инкременталним. У ову сврху се најчешће користе оптички енкодери и ризолвери.

Енкодери могу бити апсолутни или инкрементални, док ризолвери увек дају апсолутну вредност позиције зглоба. У случају када се очитава апсолутна вредност координате зглоба, информација о координати зглоба се може добити и након искључивања и поновног укључивања напајања. То је посебно погодно приликом покретања роботског система обзиром да роботски контролер приликом укључења мора да има информацију о вредностима углова у зглобовима. У случају да је сензор у зглобу апсолутни ова вредност се директно очита, а ако је инкрементални ова информација се може обезбедити на један од следећих начина. Први је стално мерење тренутне позиције робота и њено записивање у меморију. У тренутку нестанка напајања активирају се кочнице у зглобовима које обезбеђују да се зглобови не покрећу док је робот искључен. При поновном укључењу вредности координата које су очитане из меморије одговарају положају робота при укључењу. Затим се може наставити са извршавањем предвиђених задатака. Други начин је да се робот по укључивању обавезно прво доведе у унапред дефинисану почетну позицију (енг. *хоме поситион*) за коју роботски контролер има информацију о вредностима углова. Тек након довођења робота у почетну позицију робот може да крене са извршавањем захтеваних покрета.

У случају да робот ступа у контакт са околином неминовно се на месту контакта јављају силе, о чему се веома мора "водити рачуна". Код неких задатака силу треба одржавати на задатом нивоу (то је случај при свим обрадама као што је нпр. обарање ивица радног предмета глодалом који робот носи, скидање срха код одливака итд.) или силу треба минимизирати као што је случај код монтажног задатка (убацивања објекта у отвор, енг.

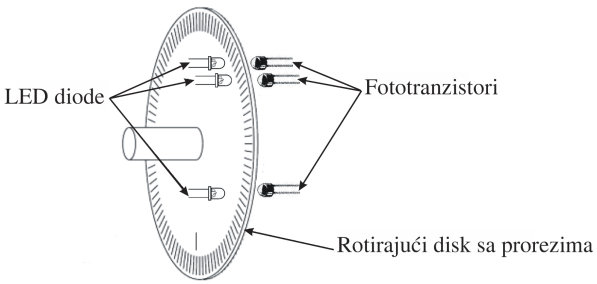
пег-ин-холе). У оба случају треба обезбедити информацију о силама које се у процесу реализације задатка јављају. У случају појаве нежељених сила може доћи до лома (радног предмета, неког елемента радног места или робота), неадекватне обраде или до заглављивања радног предмета који се монтира чиме је наставак реализације радног задатка онемогућен. Једино комерцијално доступно решење је вишекомпонентни сензор силе и момента који се смешта у зглоб хватаљке робота (између прирубнице последњег сегмента робота и хватаљке).

У тексту који следи ће бити речи о сензорима за мерење позиција зглобова и о сензорима за мерење силе и момента.

7.5.1 Инкрементални и апсолутни енкодер

Инкрементални енкодер се најчешће директно повезује са вратилом погонског мотора и чини са њим целину. Инкрементални енкодер за примену у индустријској роботици може бити ралізован као оптички или магнетни. Принцип рада обе врсте енкодера је сличан па ће се у наставку детаљно описати само инкрементални оптички енкодер.

Инкрементални оптички енкодер (сл. 7.15) се састоји од: извора светлости, обртног диска са прорезима и скупа оптичких детектора. Диск ротира заједно са вратилом мотора док су остали делови енкодера непокретни.



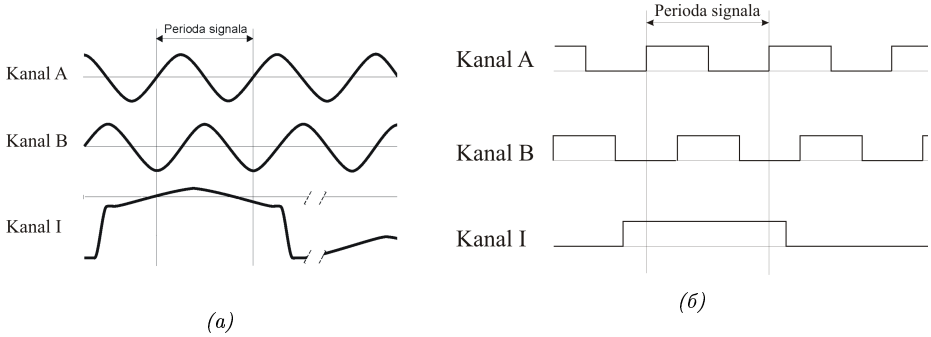
Слика 7.15: Скица главних компоненти оптичког инкременталног енкодера.

Резолуција сензора је одређена бројем прореза на обртном диску. Диск може бити начињен од танке металне фолије или стакла. Уколико је диск начињен од металне фолије прецизном обрадом се урезују отвори кроз које пролази светлосни сноп. Распоред прореза се назива кôд диска. У случају стакленог диска уобичајено је да се напаравањем нанесе танак метални слој на места која не треба да пропуштају светлост. Енкодери са стакленим диском се могу градуисати до резолуције, скоро за ред величине веће у односу на енкодере са металним диском. Скупљи су од металних и имају већи момент инерције што може бити значајно код малих мотора. Уобичајене вредности резолуције оптичких енкодера који се користе у роботици крећу се око 1000 инкремента по једном обртају диска.

Сигнали који се добијају на оптичком детектору су веома слаби, нису директно употребљиви и непходна је њихова припрема за даљу обраду. На фотодетектору (сл. 7.16а) се добија синусни сигнал, обично мале амплитуде 0-0.5V. Уколико енкодер поседује један извор светлости и фотодетектор тј. има само један низ прореза (том случају одговара нпр. канал А) могуће је добити

само информацију о броју инкремената док смер у ком се обрће осовина мотора није могуће одредити. Стога се уводи још један извор светлости и фотодетектор (канал Б) који је тако монтиран да се добија идентичан сигнал, али фазно померен у једну или другу страну (зависно од смера обртања осовине) у односу на сигнал који се очитава са канала А. Најчешће се, поред канала А и Б, уводи још један извор светлости и фотодетектор (индексни канал I) на чијем излазу се добија импулс на сваки пун обртај диска који се користи за довођење зглобова робота у почетну позицију и за корекцију измерене позиције ротора. Типични примери енкодерских сигнала, пре и после обраде, су приказани на сл. 7.16. Облик сигнала који се добијају на фотодетектору. одговара синусној и косинусној функцији па се због тога ови сигнали једним именом зову синус-косинус сигнали.

Приликом набавке енкодера могу се бирати различит типови излазних сигнала (обрађени или необрађени, сигнали са ТТЛ нивоом итд.), а избор највише зависи од захтева које поставља контролер робота. Даљим процесирањем сигнала са сл. 7.16б могуће је одредити смер обртања мотора и добити већи број импулса у односу на број зареза који поседује обртни диск енкодера (два или четири пута). Овај процес се назива квадратурно декодирање[2] и може се реализовати на два начина: обрадом помоћу додатних електронских кола непосредно после енкодера или довођењем сигнала на улазе контролера и додатном софтверском обрадом. Погодније је обраду сигнала вршити одвојено од контролера јер се софтвер који се извршава у контролеру тиме растерећује.



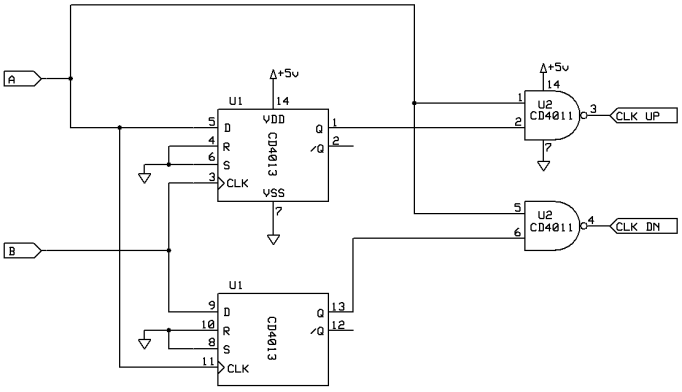
Слика 7.16: Сигнали на излазу оптичког инкременталног енкодера а) изглед сигнала добијеног на фотодетектору и б) сигнали након додатне обраде

Уколико се сигнали доводе директно на улазе контролера, потребно је да су улази такви да могу да детектују појаву растуће и/или опадајуће ивице сигнала. Уколико контролер може да детектује и растућу и опадајућу ивицу, тада је могуће измерити четири промене сигнала са енкодера чиме се добија четири пута већа резолуција. Када дође до детекције импулса потребно је променљиву у којој се чува информација о углу зглоба увећати или умањити за један инкремент. Да ли ће се променљива увећати или умањити зависи од смера обртања мотора који се одређује утврђивањем нивоа сигнала на каналу

[2]Квадратурно декодирање је добило назив због тога што фазни померај између сигнала са канала А и Б износи ±90° односно један квадрант круга.

Б (сл. 7.16б) у тренутку када се на каналу А појави нпр. растућа ивица[3]. Уколико је у том тренутку сигнал на каналу Б на логичкој „0” тада се мотор обрће у једном, а уколико је сигнал на логичкој „1” у другом смеру.

Уколико контролер није у стању да детектује тренутке када долази до појаве растуће и опадајуће ивице сигнала са канала А и Б, тада квадратурно декодирање треба вршити помоћу додатних електронских кола. Схема кола којим се врши квадратурно декодирање је дата на сл. 7.17. На излазу кола се добијају два нова сигнала: за увећавање или умањивање промењиве у којој се чува инормација о углу зглоба за један инкремент (за бројање на горе и на доле).



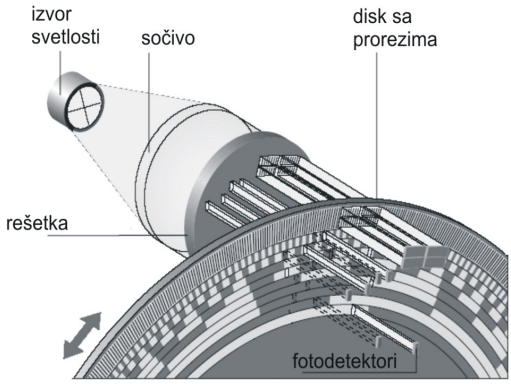
Слика 7.17: Квадратурно декодирање са два D флип-флопа и два НАНД кола

Подсетимо да кретања у роботици могу бити веома брза током приласка удаљеном објекту (глобална кретања), али и веома спора, нпр. приликом заустављања или инспекције површине као и приликом процесних операција као што је електролучно заваривање или монтажа. Стога је неопходно пронаћи најпогоднију вредност броја импулса по обртају, имајући у виду степен редукције на редукторима мотора, максималну брзину кретања, као и способност везне електронике да прими импулсе на бројање. Данас је уобичајено да се у индустријским роботима користе енкодери од 1000 импулса по обртају, што после квадратурног декодирања даје 4000 импулса по обртају. Имајући у виду да се преносни односи редуктора код савремених робота крећу и до 100:1, следи да резолуција у зглобу робота може достићи и 400.000 импулса по једном обртају зглоба робота.

Како је већ речено, мана инкременталних енкодера је што не пружају информацију о апсолутној вредности већ само о промени угла. Због тога су развијени апсолутни енкодери који пружају могућност очитавања апсолутне вредности угла у зглобу. Њихов начин рада (сл. 7.18) је сличан инкременталним енкодерима али је сам енкодер значајно сложенији: број фото детектора и стаза на диску који заједно одређују резолуцију су значајно већи. Треба имати у виду да је резолуција апсолутних енкодера ретко када већа од $2^{15} = 32768$.

[3]Смер мотора се може утврдити детектовањем било растуће или опадајуће ивице на каналу А, али је потребно да се начин детекције смера обртања одабере унапред и за одређни енкодер се увек врши на исти начин.

Такође цена оваквих енкодера је знатно већа од инкременталних идентичне резолуције, а може да премаши и укупну цену мотора и редуктора.

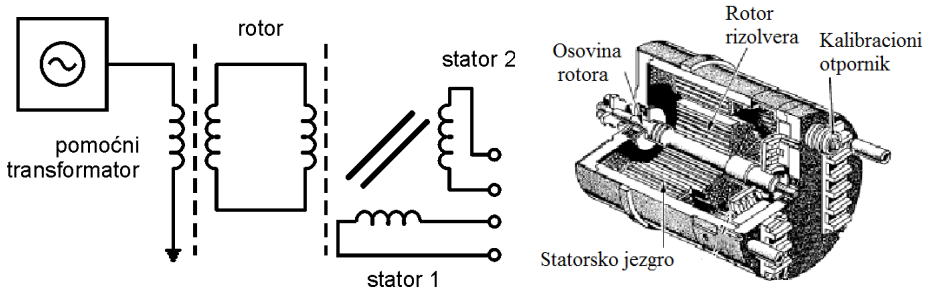


Слика 7.18: Принцип рада апсолутног оптичког енкодра

Због тога што је за поуздано мерење угла у зглобовима робота помоћу инкременталних енкодера потребно додатно монтирати кочнице за моторе (које обезбеђују да не дође до померања у зглобовима робота и одступања од вредности о угловима које су снимљене у меморији контролера док је робот искључен) у одређеним применама су неопходни апсолутни енкодери. Са њима се робот одмах по укључењу, може користити за рад.

7.5.2 Ризолвер

За разлику од сензора оптичког типа ризолвер је сензор електромагнетног типа и припада групи синхроних машина. Поседује најмање три намотаја. Два, статорска, су постављена под правим углом, док се намотај окреће заједно са осовином мотора (сл. 7.19).



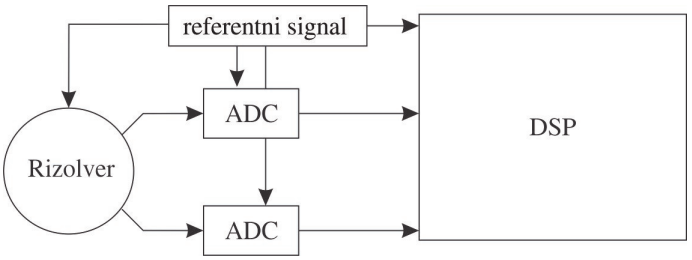
Слика 7.19: Схематски приказ ризолвера и приказ расеченог склопа

Ризолвер функционише као уређај којим се трансформише угао ротора θ_M у фазно померене наизменичне сигнале. Ротор се преко помоћног трансформатора напаја референтним сигналом амплитуде A и учестаности ω_C.

Једначином (7.1) су описани сигнали који се добијају на намотајима статора

$$\begin{aligned} S_1 - S_3 &= A \sin(\omega_C t) \cdot \sin(\omega_M) \\ S_4 - S_2 &= A \sin(\omega_C t) \cdot \cos(\omega_M) \end{aligned} \tag{7.1}$$

који се затим конвертују у дигитални облик. Конверзијом два статорска сигнала, уз познати референтни сигнал, на ДСП процесору се може обавити захтевано израчунавање угла (сл. 7.20).



Слика 7.20: Софтверска конверзија сигнала са ризолвера у дигитални облик

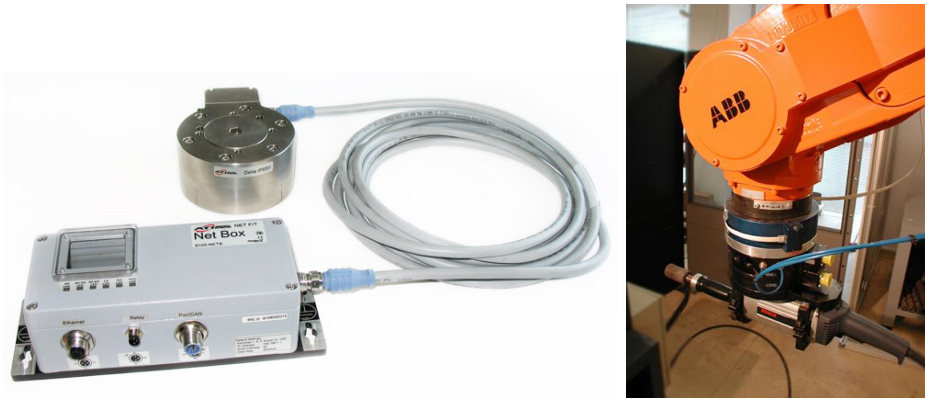
Треба напоменути да израчуната вредност угла ротора мотора, због постојања редуктора, не одговара углу зглоба робота. Дакле израчунавањем фазног помераја између поменутих сигнала добија се вредност угла ротора мотора. Уколико је нпр. преносни однос редуктора 100:1 тада за сваки детектовани фазни померај од (пун обртај осовине мотора) треба повећати вредност угла зглоба за 3.6°.

Предности ризолвера у односу на енкодере долазе до изражаја у индустријским апликацијама у којима има вибрација и нечистоћа. Осим тога, ризолвери су поузданији. Остале предности су на страни енкодера: пружају више информација на малим брзинама, лакше остварују велику резолуцију, тачност је већа а цена нижа.

7.5.3 Сензор за мерење сила контакта са околином

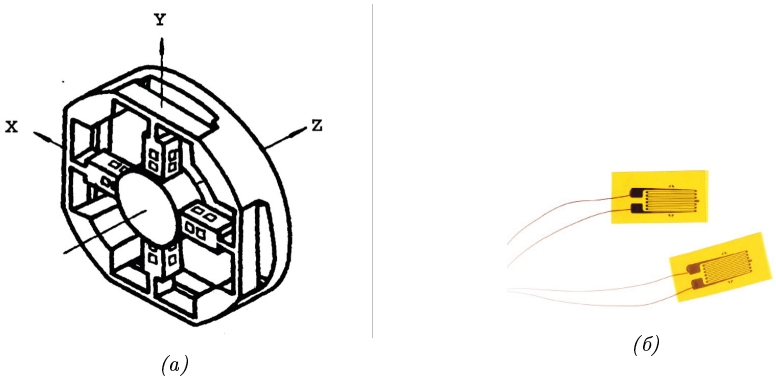
Поред сензора за мерења положаја зглобова робота, у појединим задацима је потребно мерити силу која се јавља приликом контакта алата или радног предмета који хватаљка држи и околине. Комерцијално доступни сензори (сл. 7.21) за мерење силе (и/или момента) су такве конструкције да се једноставно додају на механичку структуру робота. Смештају се између хватаљке и последњег сегмента робота (сензор се вијцима причврсти за последњи сегмент робота, а на њега се причврсти хватаљка). Приликом избора сензора треба водити рачуна о опсегу интензитета сила за који је сензор пројектован. Сложеност сензора се може бирати, али се најчешће користе сензори којима се могу измерити све три компоненте силе и све три компоненте момента. Такви сензори се називају шестокомпонентним сензорима за мерење силе и момента (енгл. *6-axis force/torque sensor*).

Рад сензора се базира на мерењу деформација посебно обликованог и еласичног елемента који је израђен од високо квалитетног и еластичног челика (једна од могућих конструкција је приказана на сл. 7.22a који је са једне стране (нпр. ободом) причвршћен за последњи сегмент робота а са



Слика 7.21: Сензор за мерење силе и момента са пратећим уређајем (лево) и робот са уграђеним сензором (десно)

друге (нпр. централним делом) за хватаљку. Дејство силе на хватаљку ће узроковати деформацију посебно пројектованих еластичних делова сензора чије деформације у разним правцима се мере мерним тракама (на сл. 7.22 се виде делови који се еластично деформишу и на које су налепљене мерне траке, а на сл. 7.22б је дата фотографија мерне траке). Промена отпорности на мерним тракама одговара деформацијама еластичних елемената на које су траке налепљене, док деформације еластичних елемената зависе од правца и интензитета сила и момената који делују на хватаљку. Обрадом сигнала са мерних трака (коришћењем прилагодне електронике која се налази у кутији на сл. 7.21) се може одредити вредност силе и момента који делују на хватаљку робота. Према томе, на основу измерених еластичних деформација сензора се добија информација о силама и моментима који су је узроковали.



(а) *(б)*

Слика 7.22: Сензор силе а) еластично тело сензора и б) отпорничка мерна трака

Предности ових сензора су висока тачност и поновљивост мерења. Међутим, главни разлози због којих ови сензори нису пронашли велику примену у индустрији су: чињеница да се у круту структуру робота уносе еластични

елеменат[4], висока цена и осетљивост на ударце. Поред тога, примена ових сензора не омогућава пасивно прилагођење (енг. пассиве цомплианце) објеката у контакту које је неопходно за успешну реализацију многих контактних, а посебно монтажних задатака.

7.6 КОНТРОЛЕР ИНДУСТРИЈСКОГ РОБОТА

Контролери робота су се развијали током последњих деценија паралелно са развојем микропроцесора и софтверских апликација. Управљачки систем који је је у почетку преузет од ЦНЦ машина надограђен је тако да може управљати и са више оса од броја уобичајеног за ЦНЦ машине. Због сложености задатака за које су роботи били намењени, скупови команди су састављани у целине, макрое. Управо то обједињавање команди поставило је основу будућих језика за програмирање робота.

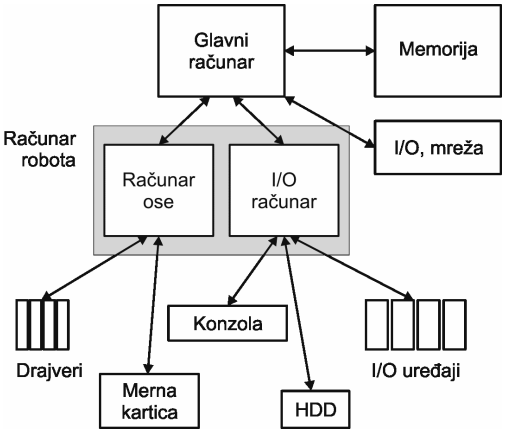
Први прави, наменски пројектовани контролери робота били су вишепроцесорске машине, које су имале одвојени аналогни део од дигиталног. Висока поузданост у раду остварена је УНИХ оперативним системом. Свака оса робота имала је своју аналогну картицу и дигиталну матичну плочу. Поред тога, постојале су и плоче за комуникацију са периферијама, за дигиталне улазе и излазе као и мерноуправљачке плоче са аналогним улазима и излазима. Основна карактеристика таквог контролера је била могућност да се робот програмира кроз панел на управљачком орману или путем конзоле. Међутим, први роботски контролери били су потпуно затворени за интервенције са стране корисника у смислу подешавања параметара, као што су појачања регулатора, параметара сензора и сл.

Даљим развојем индустријске роботике се дошло до модуларне архитектуре котролера (сл. 7.23) тако да контролер робота уобичајено садржи:

- главни рачунар,
- рачунаре за управљање појединим степенима слободе,
- електроенергетски део за погон мотора,
- мерне картице,
- улазно излазне картице,
- периферијске уређаје,
- напајање и модул за беспрекидно напајање,
- конзолу за програмирање робота,
- панел за програмирање на самом контролеру итд.

[4]У раду (Паул, Р.П.,"Проблемс анд Ресеарцх Иссуес Ассоциатед витх тхе Хубрид Цонтрол оф Форце анд Дисплацемент"Проц. ИЕЕЕ Инт. Цонф. он Роботицс анд Аутоматион, пп. 1966-1971., 1987) се наводи "сензор силе и околина су системи чија је сопствена фреквенција истог реда величине као и манипулатора. Када се спрегну путем контакта манипулатора са околином, тада је резултујући систем веома тешко, а понекад и немогуће, стабилизовати“.

Главни рачунар обавља задатке комуникације са корисником, обраду сензорских информација са спољашњих сензора, комуникације са другим рачунарима, надгледа целокупни систем итд. У главном рачунару робота је обједињено неколико картица. Ту спадају картице за управљање појединим степенима слободе, измењива ФЛАСХ меморија, портови за повезивање са периферијским уређајима и картице за стандардне комуникационе протоколе.



Слика 7.23: Сензор за мерење силе и момента са пратећим уређајем (лево) и робот са уграђеним сензором (десно)

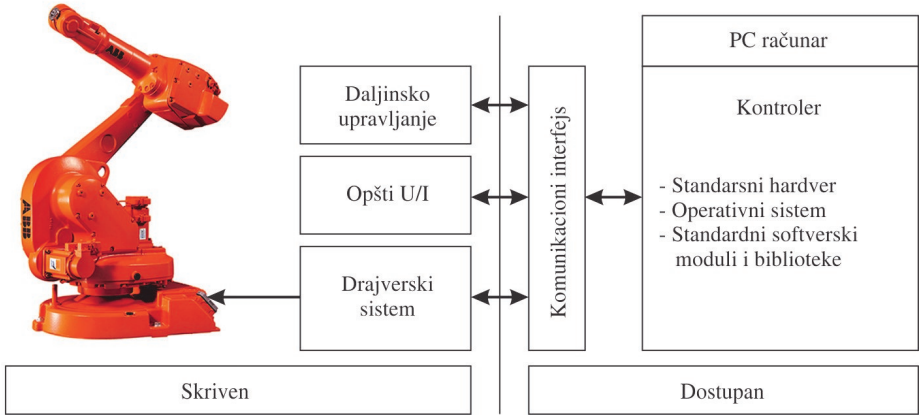
Рачунари по појединим степенима слободе обављају прерачунавање команди које стижу са главног рачунара и генеришу управљачки сигнал за погон мотора. Електроенергетски систем за погон мотора (драјвер) представља посебно пројектоване јединице које конвертују сигнал са рачунара по појединим степенима слободе у управљачки напон мотора. У новије време сигнал који стиже са рачунара по појединим степенима слободе је ПWM типа.

Напајање је посебно изведено за аналогни и за дигитални део контролера робота. Посебан модул у склопу напајања је и батеријско напајање за поуздан и безбедан завршетак рада и за случај када дође до прекида спољашњег напајања.

Отворени контролер индустријског робота

Раније, са затвореним контролерима, није била могућа интеграција више робота у један задатак, повезивање робота у радну целину са другим машинама, коришћење напредних сензора (као што је визија), одлучивање о веома сложеним процесима које захтева велику процесорску снагу. Због тога се јавила потреба за развојем тзв. отворених контролера. Термин "отворени контролер" означава архитектуру која је базирана на познатим и јавно доступним стандардима чиме су омогућене интервенције у контролеру од стране корисника. Све већа поузданост оваквих контролера довела је до изградње нових управљачких система који су оставили могућност да се накнадним интервенцијама контролер робота отвори ка другим контролерима или ка другим ПЦ рачунарима, пружајући флексибилност и надоградивост које је донела ПЦ архитектура рачунара.

Једна од верзија отвореног контролера приказана је на сл. 7.24. Уколико је, као на сл. 7.23, архитектура контролера робота базирана на ПЦ рачунару са или без класичног ПЛЦ-а уграђеног у контролер, задаци које треба реализовати роботом постају лакше изводљиви. Отворени контролер пружа могћност лакше интеграције робота у постојеће радно окружење.



Слика 7.24: Блок дијаграм отвореног управљачког система робота

Повезивањем роботског контролера са постојећим контролерима лако се преузимају све информације о радном окружењу у коме се могу налазити објекти као што су апарати за заваривање, ласерски системи, системи визије, позиционери, као и заштитне светлосне завесе или снопови, ограде, капије и слично.

ЛИТЕРАТУРА

An C., Atkenson C, Hollerbach J., *Model-Based Control of a Robot Manipulator*, The MIT Press, 1998.

Angeles J., *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems - Theory, Methods and Algorithms*, Springer-Verlag, 2003.

Craig J., *Introduction to Robotics: Mechanics & Control*, Addison–Wesley, 1986.

Dorf. R , Bishop R., *Modern Control Systems*, Addison-Wesley, 1995.

Iovine J., **PIC Robotics**, McGraw-Hill Companies, 2004.

Kurefess T. R., *Robotics and Automation Handbook*, CRC Press , 2005.

Lewin A.R.W.Edwards, *Open-Source Robotics and Process Control Cookbook*, Elsevier, 2005.

Milosavljević Č., *Teorija automaskog upravljanja-1*, Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Istočnom Sarajevu, 2008.

Milosavljević Č., *Teorija automaskog upravljanja-2*, Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Istočnom Sarajevu, 2008.

Nwokah O., Hurmuzlu Y., (Eds), *The Mechanical Systems Design Handbook*, CRC Press, 2002.

Nof S., (Ed.), *Handbook of industrial robotics,* John Wiley, 1985.

Paul, R.P., *Problems and Research Issues Associated with the Hybrid Control of Force and Displacement*, Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 1966-1971., 1987

Potkonjak V., *Robotika*, Naučna knjiga, 1989

Rivin E. I., *Mechanical design of robots*, McGraw-Hill, 1987

Sandin P. E., *Robot mechanisms and mechanical devices*, McGraw-Hill, 2003.

Sandler B. Z., *Robotics - Designing the mechanisms for automated machinery*, Prentice – Hall, 1991

Selig J.M., *Introductory Robotics*, Prentice – Hall, 1992.

Siciliano B., Khatib O. (Eds.), *Springer handbook of robotics*, Springer-Verlag, 2008.

Tsai Lung-Wen, *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*, John Wiley, 1999.

Vukobratović M., (u saradnji sa Đurović M., Hristić D., Karan B., Kirćanski M., Kirćanski N., Stokić D., Vujić D., Živković V.), *Uvod u robotiku*, Institut Mihajlo Pupin, Beograd, 1988.

Vukobratović M., *Primenjena dinamika manipulacionih robota*, Tehnička knjiga, Beograd, II dopunjeno i izmenjeno izdanje, Beograd, 1990

Vukobratović M.,Potkonjak V, *Dinamika manipulacionih robota i aktivnih prostornih mehanizama*, Institut Mihajlo Pupin, Beograd, 1981

Wilson J., *Sensor Technology Handbook*, Elsevier, 2004.

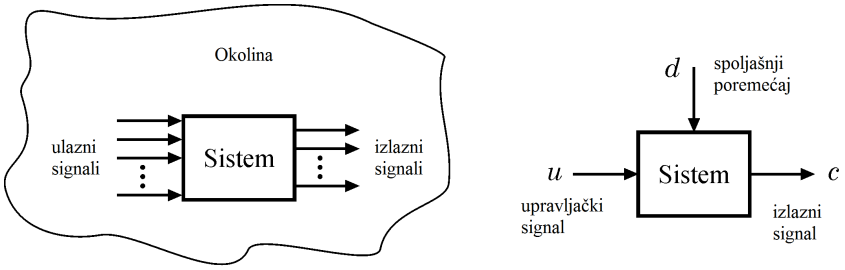
8. УПРАВЉАЊЕ ИНДУСТРИЈСКИМ РОБОТИМА

Индустријски роботи представљају активне просторне механизме чији су сви степени сло-боде оснажени. Да би се остварило жељено кретање хватаљке неопходно је да се сви зглобови симултано крећу на тачно одређени начин. Због тога се јављају веома сложени динамички утицаји међу зглобовима који су изразито нелинеарни. Стога и управљање оваквим системима представља веома сложен задатак који захтева развијање посебних прила-за који се надовезују на класичну теорију аутоматског управљања. Ради комплетности излагања су у овом поглављу најпре изложене основе аутоматског управљања а затим су приказани начини управљања индустријским роботима.

8.1 ДЕФИНИСАЊЕ УПРАВЉАЧКОГ ЗАДАТКА

Да би размотрили и правилно разумели задатак управљања индустријским роботима, подсетићемо се најпре основних појмова, дефиниција и концепата управљања из теорије аутоматског управљања. Овде ће бити изложене само основне поставке, онолико колико је потребно за разумевање материје која следи. С обзиром да је теорија аутоматског управљања добро развијена, за детаљнију анализу, читаоци се упућују на богату литературу из ове области.

Посматрајмо систем, схематски приказан на сл. 8.1а. Према најширој дефиницији, систем је скуп елемената повезаних у циљу постизања ефеката који се не могу постићи ни са једним елементом појединачно. Систем делује у некој околини, која на њега утиче, а истовремено, и систем утиче на околину. Ако се пажљиво анализира међусобна интеракција околине и система, њихово међудејство се може представити сигналима: околина делује на систем путем улазних сигнала, док систем делује на околину путем излазних сигнала. Ови сигнали представљени су на сл. 8.1 стрелицама, чије усмерење показује смер дејства сигнала. У најопштијем случају, систем са сл. 8.1а представља пример система са више улаза и више излаза.



(а) *(б)*

Слика 8.1: Схематски приказ система: а) општи приказ система и међусобног дејства са околином, б) систем аутоматског управљања са једним улазом и једним излазом

Ако се ради о систему аутоматског управљања, онда се улазни сигнали у систем могу поделити у две категорије. На једну групу улазних сигнала можемо директно да утичемо, и тиме остварујемо жељене утицаје на систем.

Такви сигнали називају се управљачким. Другу групу улазних сигнала представљају сигнали на које не можемо да остваримо директан утицај и њихово дејство је најчешће унапред непознато. Овакве улазне сигнале називамо спољашњим поремећајима. Сигнали на излазу система називају се излазним или управљаним сигналима (величинама).

Даље ће бити разматран једноставнији тип система, са једним улазом и једним излазом, који је схематски представљен на сл. 8.1б. Главни утицај околине се одвија путем управљачког сигнала у, док је одзив система представљен излазним сигналом c. Поред тога, околина може да делује на систем на непредвидив начин, путем спољашњих поремећаја, који се схематски могу приказати деловањем сигнала д. Приметимо да се сигнал поремећаја не рачуна као улазни сигнал, тако да кажемо да систем има један улаз и један излаз, иако на сл. 8.1б две стрелице улазе у блок који симболизује систем.

Најчешће се захтева да се излаз из система понаша на жељени, унапред познат или специфициран начин. Математички, то се може исказати као

$$c(t) = r(t), \tag{8.1}$$

где је са $c(t)$ означена промена излазног сигнала током времена, док $r(t)$ представља жељени закон ове промене. Функција $r(t)$, често се назива и референтни сигнал, тако да можемо рећи да једначина (8.1) представља жељу или тежњу, да излазни сигнал прати референтни сигнал.

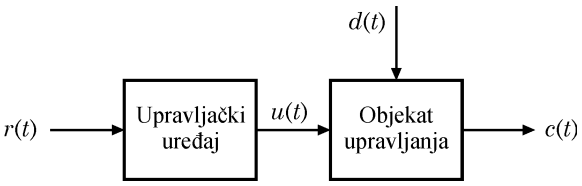
Сада се задатак управљања може формулисати као захтев да се на основу референтног сигнала $r(t)$, одреди, или формира управљачки сигнал $u(t)$, којим ће се деловати на улаз система тако да излазни сигнал буде једнак референтном, односно, буде испуњена једначина (8.1).

У теорији аутоматског управљања се, у односу на врсту референтног сигнала $r(t)$, класификују задаци управљања. Наиме, ако је референтни сигнал $r(t)$ константан током времена, ради се о регулацији. Ако је референтни сигнал током времена променљив, ради се о управљању. При томе, закон промене референтног сигнала може бити унапред познат, што је једноставнији случај, или потпуно непознат, што је, наравно, сложенији случај.

С обзиром на то да се систем аутоматског управљања може састојати од више компоненти или подсистема, на даље ћемо подсистем којим желимо да управљамо називати објектом управљања, док ћемо под појмом система подразумевати целокупан систем аутоматског управљања.

Задатак управљања се може, начелно, решити на два начина. Једноставнији приступ је схематски приказан на сл. 8.2. Ако нам је објекат управљања веома добро познат (нпр. на основу посматрања, или познавања фундаменталних физичких принципа по којима се објекат влада) можемо да формирамо модел његовог понашања, који ће бити основа за конструкцију управљачког уређаја који ће само на основу референтног сигнала $r(t)$ генерисати управљачки сигнал $u(t)$. Овај начин управљања се назива управљањем без повратне спреге.

Основни проблем при оваквом начину формирања управљачког сигнала је што се управљачки сигнал генерише само на основу референтног сигнала и модела тј. нашег знања о понашању објекта управљања. Другим речима, управљачки уређај нема информацију о тренутној вредности излазне величине



Слика 8.2: Блок схема управљања без повратне спреге

$c(t)$. Успех управљања директно зависи од квалитета моделирања понашања објекта. Ако модел на коме је заснован управљачки уређај добро представља реално понашање, онда ће и излазни сигнал у знатној мери пратити референтни сигнал, односно биће му веома близак. Међутим, практично је немогуће направити модел који би обухватио све аспекте понашања објекта управљања, тако да у највећем броју случајева оваквим начином не можемо остварити тежњу да излазни сигнал верно прати референтни.

Други, значајнији, проблем је то што се деловање спољашњих поремећаја не може унапред предвидети. Стога се не може ни квалитетно моделирати нити узети у обзир при генерисању управљачког сигнала па је јасно да спољашњи поремећаји могу озбиљно утицати на понашање објекта управљања због чега излазни сигнал може значајно одступати од референтног.

Због свега наведеног се управљање без повратне спреге примењује само код система који испуњавају следеће услове:

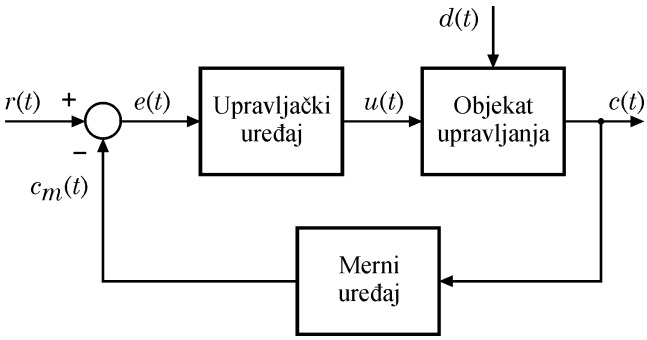
- објекат управљања је мање сложености, тако да се релативно једноставно може добити квалитетан модел његовог понашања,
- дејство спољашјних поремећаја је мало, или се може занемарити,
- захтеване преформансе система нису исувише велике.

Овакав начин управљања назива се још и програмско управљање, јер је управљачки уређај "прогамиран"да генерише управљачки сигнал на унапред задати начин не водећи рачуна о стварном стању система.

Најбољи начин за превазилажење поменутог проблема је да се за генерисање управљачког сигнала искористи и информација о тренутној вредности излазне величине. То доводи до концепта управљања са повратном спрегом, који је схематски приказан на сл. 8.3. Тренутна вредност излазног сигнала $c(t)$ се прати посредством мерног уређаја, и враћа на улаз управљачког уређаја, као измерена вредност излаза $c_m(t)$. Блок представљен кружићем на сл. 8.3, се назива детектором грешке. У њему се обавља поређење референтног сигнала са измереним сигналом на излазу, и формира се сигнал грешке $e(t)$. Приметимо да се поређење сигнала може извести као операција одузимања, односно,

$$e(t) = r(t) - c_m(t), \tag{8.2}$$

отуда су и сигнали који улазе у детектор грешке означени знацима плус и минус. Приметимо још да мерена вредност улази у детектор грешке са знаком минус, тако да овде говоримо о управљању са негативном повратном спрегом.



Слика 8.3: Блок схема прављања са повратном спрегом

Размотримо сада задатак управљања, односно генерисање управљачког сигнала $u(t)$ тако да излазни сигнал $c(t)$ прати референтни сигнал $r(t)$. Без улажења у детаље, и губитка општости излагања, претпосавићемо да је мерни уређај такав, да идеално и верно мери сигнал на излазу система, односно,

$$c_m(t) \equiv c(t). \tag{8.3}$$

Тада можемо сматрати да је сигнал грешке настао поређењем референтног и излазног сигнала, односно,

$$e(t) = r(t) - c(t). \tag{8.4}$$

Претпоставимо да је вредност излазног сигнала мања од вредности референтног сигнала. Тада је сигнал грешке позитиван. Позитиван сигнал грешке треба да у управљачком уређају генерише такав управљачки сигнал, који ће натерати систем да излазни сигнал $c(t)$ почне да расте.

Претпоставимо сада да је вредност излазног сигнала већа од вредности референтног сигнала. Тада је сигнал грешке негативан. Негативан сигнал грешке треба у управљачком уређају трансформисати у такав управљачки сигнал, који ће довести до смањења излазног сигнала.

Коначно, ако су излазни и референтни сигнали једнаки, тада је сигнал грешке једнак нули, па управљачки уређај треба да престане са генерисањем промене управљачких сигнала, јер је задатак управљања остварен. Из наведене анализе може се закључити да је задатак управљачког уређаја да на основу сигнала грешке произведе такве управљачке сигнале, који ће довести до смањења грешке, односно, у идеалном случају свести сигнал грешке на нулу.

Управљачки уређај, као и у случају управљања без повратне спреге, може бити конструисан на основу познавања модела понашања објекта управљања. Међутим, због присуства повратне спреге, ово знање не мора бити прецизно и детаљно. Шта више, управљање са повратном спрегом заснива се на сигналу грешке, за чије добијање није потребно никакво познавање модела објекта. Према томе, можемо закључити да присуство повратне спреге смањује потребу за прецизним познавањем модела објекта управљања. Другим речима,

грешке одзива система настале због непознавања тачног модела понашања објекта управљања, биће значајно смањене услед дејства повратне спреге.

I утицаји спољашњих поремећаја на систем, у случају управљања са повратном спрегом биће значајно смањени. Претпоставимо да излазни сигнал верно прати референтни. Ако у једном тренутку, услед деловања поремећаја дође до одступања излазне величине од референтне, појавиће се сигнал грешке на улазу управљачког уређаја. Постојање сигнала грешке довешће до формирања новог управљачког сигнала, који ће деловати тако да се грешка смањи.

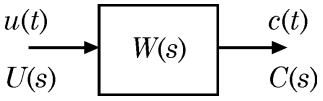
Према томе, можемо да закључимо да је затварање повратне спреге, односно, враћање сигнала са излаза система на његов улаз, универзални механизам који олакшава проблем управљања, јер се генерисање управљачког сигнала заснива на актуелном стању излаза система, односно, постојању сигнала грешке, те се управљање са негативном повратном спрегом најчешће користи у пракси.

Иако управљање са негативном повратном спрегом уноси много значајних позитивних особина у понашање система, затварање повратне спреге може довести до проблема са стабилношћу система, чак иако је објекат управљања пре затварања повратне спреге био стабилан. Овде се нећемо упуштати у детаље анализе стабилности система, сматрајући да је код свих система које посматрамо стабилност осигурана, а да је нагласак на остваривању других перформанси.

У даљем тексту ћемо разматрати проблем управљања линеарним системима са једним улазом и једним излазом.

8.1.1 Линеарни системи са једним улазом и једним излазом

Разматраћемо линеарне системе са једним улазом и једним излазом који задовољавају услов линеарности. Схематски се такав систем може представити као на сл. 8.4.



Слика 8.4: Линеарни систем са једним улазом и једним излазом

Особина линеарности система утврђује се, као и у математици, постојањем особина хомогености и адитивности. Нека је на улаз система доведен сигнал $u_1(t)$, и нека је том приликом на излазу система забележен сигнал $c_1(t)$. Нека је затим на улаз система доведен сигнал $u_2(t)$, а при томе се на излазу појавио сигнал $c_2(t)$.

Ако се при довођењу на улаз линеарне комбинације сигнала $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$ на његовом излазу добије линеарна комбинација сигнала $c(t) = \alpha c_1(t) + \beta c_2(t)$ где су α и β произвољне константе, систем је линеаран. Већина реалних система није линеарна, али се са више или мање успеха могу апроксимирати линеарним системима. Због тога је изучавање линеарних система важно не само за разумевање основних концепата управљања, већ се многе технике управљања линеарним системима могу применити и код нелинеарних.

Оно што линеарне системе чини посебно интересантним је то што се њихово понашање описује линеарним диференцијалним једначинама на које се може применити Лапласова трансформација. Тако се са диференцијалних једначина у временском домену прелази на алгебарске једначине у Лапласовом домену. Решавање и анализа алгебарских једначина су једноставнији од решавања и анализе диференцијалних једначина, па су многе технике из теорије аутоматског управљања развијене управо на бази Лапласове трансформације.

Основни концепт решавања и анализе линеарних система се заснива на појму функције преноса. Нека на улазу делује сигнал $u(t)$, којем одговара комплекси лик Лапласове трансформације $U(s)$. Нека је том приликом, на излазу система забележен сигнал $c(t)$, чији је комплексини лик $C(s)$. Функција преноса линеарног система се дефинише као однос комплексних ликова, односно Лапласових трансформација, сигнала на излазу и улазу система, при нултим почетним условима:

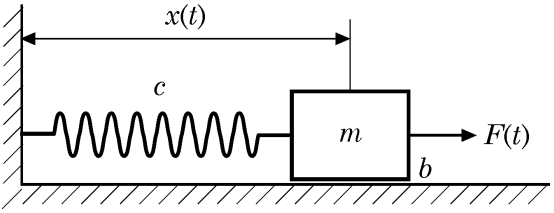
$$W(s) = \frac{C(s)}{U(s)}. \tag{8.5}$$

Функција преноса омогућава да системе посматрамо са становишта улаз-излаз, дакле, као црне кутије чији нас садржај не интересује већ само њихово деловање. Читаво понашање система моделирано је преко функције преноса (8.5). Заиста, на основу једначине (8.5), видимо да се излазни сигнал, односно његов комплексни лик, добија као:

$$C(s) = W(s) \cdot U(s), \tag{8.6}$$

односно, ако познајемо функцију преноса система W(c), и сигнал који делује на његовом улазу $U(s)$, лако можемо одредити сигнал на излазу система $C(s)$. Облик сигнала на излазу у временском домену $c(t)$ одређујемо применом инверзне Лапласове трансформације.

С обзиром на то да постоји обострано једнозначно пресликавање између сигнала у временском домену и његовог комплексног лика, на даље ћемо врло често употребљавати или само један или други облик, или оба истовремено, подразумевајући да се други израз увек може лако одредити, и да не постоји могућност забуне.



Слика 8.5: Механички линеарни систем

Размотримо сада једноставан пример линеарног механичког система где тело масе m, може да клизи по подлози (сл. 8.5). На контакту тела и подлоге делује само вискозно трење тако да је отпор пропорционалан брзини клизања. Коефицијент пропорционалности означићемо са b. Тело је опругом причвршћено за непомични ослонац, при чему ћемо сматрати да је деформација

опруге линеарна у односу на примењену силу, а коефицијент крутости опруге је c. На тело делује спољашња сила $F(t)$, која представља улаз у систем. За излазну величину прогласићемо тренутни положај тела $x(t)$.

На основу знања из механике, лако можемо поставити диференцијалну једначину која описује понашање овог механичког система:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t), \tag{8.7}$$

где је x положај, $\dot{x}$ брзина, а $\ddot{x}$ убрзање тела. Уочавамо да је у питању линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима, па на њу можемо применити Лапласову трансформацију, и тако одредити функцију преноса механичког система у облику:

$$W_o(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + c} = \frac{\frac{1}{c}}{\frac{m}{c}s^2 + \frac{b}{c}s + 1}. \tag{8.8}$$

Видимо да је израз за функцију преноса механичког система дат у облику реалне рационалне функције по комплексној променљивој s, односно као количник полинома по у бројиоцу и имениоцу. Степен полинома у имениоцу је $n = 2$, па кажемо да је систем другог реда, док је степен полинома у бројиоцу $m = 0$, па кажемо да систем нема коначних нула.

Системи другог реда чија функција преноса има облик (8.8), врло су важни за проучавање понашања система, јер се понашање многих система може врло добро апроксимирати оваквим системима. У најопштијем облику, функција спрегнутог преноса система другог реда без коначних нула може се представити у облику:

$$W_s(s) = \frac{KT}{T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1} = \frac{K\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \tag{8.9}$$

где је K појачање система, T временска константа система, ζ фактор релативног пригушења система, а $\omega_n = 1/T$ сопствена природна непригушена учестаност система. Поређењем константи уз одговарајуће степене по s у изразима (8.8) и (8.9), лако можемо утврдити зависност релативног фактора пригушења и сопствене природне непригушене учестаности у функцији параметара механичког система.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{c}{m}},\ \zeta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{mc}},\ K = \frac{1}{\sqrt{mc}}. \tag{8.10}$$

Смисао релативног фактора пригушења и сопствене природне непригушене учестаности система, најлакше је схватити анализом временског одзива система. Нека интензитету силе (улаз система) одговара јединични одскочни сигнал, дефинисан као:

$$f(t) = h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}, \tag{8.11}$$

тада је његов комплексни лик дат изразом

$$H(s) = \frac{1}{s}. \tag{8.12}$$

Претпоставимо, ради лакше анализе, да је појачање система $K = 1$. Одзив система другог реда добија се на основу израза (8.6), који сада постаје

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}. \tag{8.13}$$

Одзив система у временском домену добија се применом инверзне Лапласове трансформације као

$$c(t) = L^{-1}\left\{C(s)\right\}. \tag{8.14}$$

Подсетимо се да при тражењу инверзне Лапласове трансформације важну улогу имају полови функције чија се трансформација тражи, односно нуле имениоца разломка, чија се инверзна Лапласова трансформација рачуна. У изразу (8.13), полином у имениоцу разломка по комплексној променљивој s поседује три нуле. Прва је одређена изразом

$$s = 0, \tag{8.15}$$

и потиче од улазног сигнала, док су друге две одређене изразом

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0, \tag{8.16}$$

који представља карактеристичну једначину система, чија су решења дата са

$$s_{1/2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}. \tag{8.17}$$

У зависности од вредности фактора релативног пригушења ζ, видимо да решења дата изразом (8.17) могу бити чисто имагинарна за $\zeta = 0$, коњуговано комплексна за $0 < \zeta < 1$, реална и међусобно једнака за $\zeta = 1$, односно реална и различита за $\zeta > 0$.

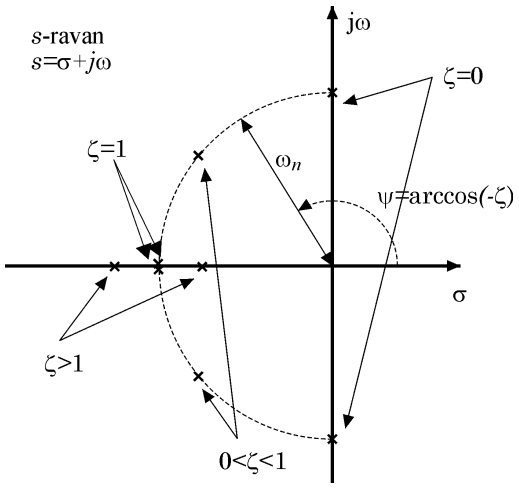
Положај полова датих изразом (8.17) у функцији параметра ζ можемо скицирати у s-равни, као на сл. 8.7, где је положај полова означен крстићима. Сви полови нацртани су за исту вредност ω_n.

Коњуговано комплексни полови се померају по кружници са центром у координатном почетку, а чији полупречник износи ω_n. Тачан положај на кружници одређен је углом ψ као на сл. 8.7, а његова вредност директно зависи од фактора релативног пригушења:

$$\psi = \arccos(-\zeta). \tag{8.18}$$

Напоменимо да аргумент arccos функције не може бити већи од један, тако да се за вредности $\zeta > 1$, добијају полови који се налазе на реалној оси.

Након ове анализе, применимо инверзну Лапласову трансформацију да би одредили одзив у временском домену. Израз који се добија може се написати



Слика 8.6: Зависност положаја полова од фактора релативног пригушења

у облику:

$$c(t) = \begin{cases} 1 - \cos(\omega_n t), & \zeta = 0, \\ 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \psi), & 0 < \zeta < 1, \\ 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t), & \zeta = 1, \end{cases} \tag{8.19}$$

за вредности фактора пригушења између нула и један, што одговара коњуговано комплексним половима на кружници са сл. 8.7. Ако је релативни фактор пригушења већи од један, полови су реални, па се одзив може добити у облику:

$$c(t) = 1 - \frac{b}{b-a} e^{-at} + \frac{a}{b-a} e^{-bt}, \tag{8.20}$$

где су a и b реални полови одређени изразима:

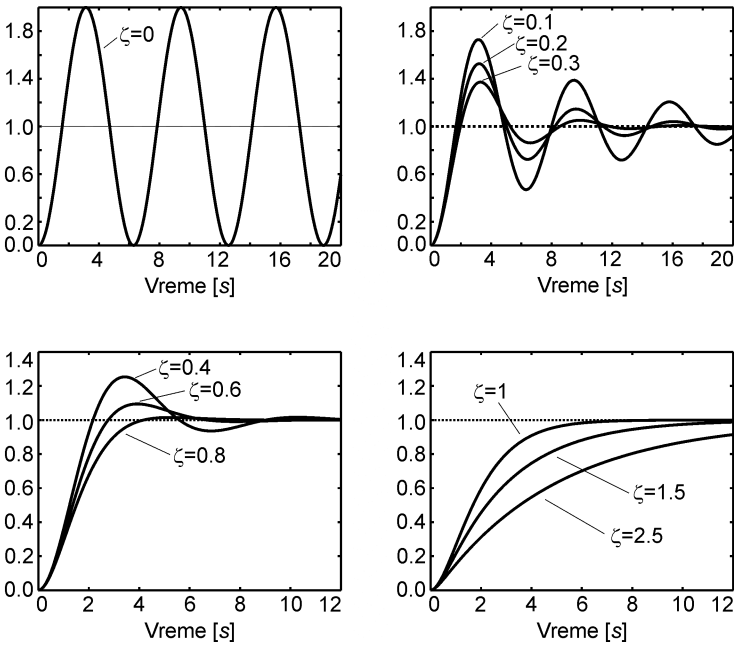
$$a = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad b = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}. \tag{8.21}$$

Временски одзиви система другог реда без коначних нула за различите вредности релативног фактора пригушења приказани су на сл. 8.7.

У складу са релацијом (8.19), када је $\zeta = 0$, одзив је простопериодична осцилаторна функција времена, при чему је фреквенција осцилација управо ω_n. Такав систем називамо непригушеним, јер је фактор пригушења једнак нули. Када је $0 < \zeta < 1$, одзив система су осцилације чија амплитуда прати енвелопу која експоненцијално опада са протоком времена. За мале вредности пригушења, одзив прави неколико осцилација, пре него што се смири око јединице. Са порастом фактора пригушења, осцилације се све брже смирују, и већ за вредности $\zeta > 0.5$ примећујемо само једну периоду осцилација.

Код свих ових одзива можемо уочити заједничку карактеристику, а то је да постоје осцилације око вредности у стационарном стању. Са сл. 8.7 видимо да

се могу појавити значајни пребачаји жељене вредности, такозвани прескоци, праћени такође значајним подбачајима. Тек после неколико осцилација, одзив система се смирује око вредности у стационарном стању.



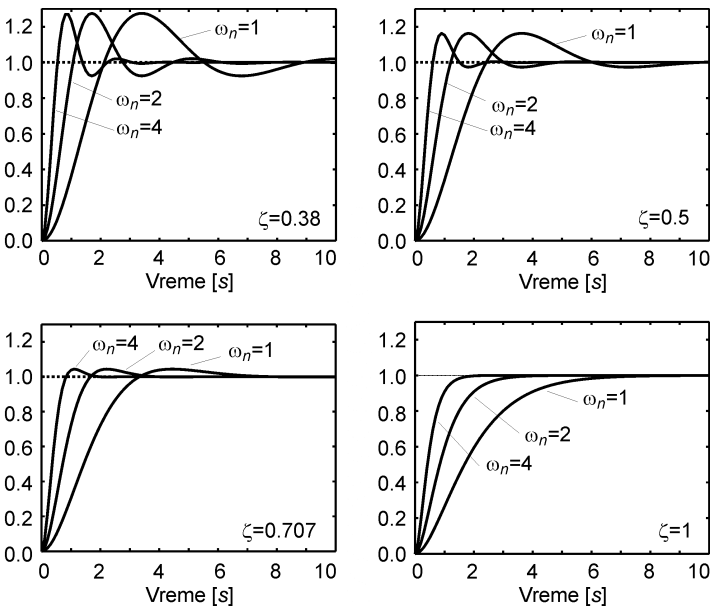
Слика 8.7: Одзиви система другог реда за различите вредности фактора релативног пригушења

Одзив система када је $\zeta = 1$ назива се критични апериодични одзив, а систем критично пригушеним. Видимо да нема прескока одзива система изнад вредности у стационарном стању. Ако је $\zeta > 1$, систем називамо претерано (надкритично) пригушеним. Са сл. 8.7 уочавамо да и у овом случају одзив нема прескоке, али је време потребно да одзив достигне референтну вредност дуже него код критично пригушеног система.

Из приказаних одзива система можемо извући следећи закључак: што је систем мање пригушен, одзив ће пре достићи референтни ниво, међутим, настаће већи прескоци, и постојаће осцилације. Што је систем пригушенији, прескоци су мањи, али је и систем спорији. Ако је систем претерано пригушен, прескока неће бити, али је одзив изузетно спор. Цела ова дискусија изведена је за различите вредности фактора релативног пригушења ζ и показује какав карактер ће поседовати одзив система. Међутим, и промена вредности параметра ω_n ће утицати на карактеристике одзива система. Као што се са сл. 8.7 види, одређује полупречник кружнице на којој се налазе коњуговано комплексни полови, односно, удаљење полова од координатног почетка. Ако фиксирамо вредност ζ, а мењамо параметар ω_n тако што га повећавамо, онда се полови удаљују од координатног почетка, дуж линије одређене углом ψ, као на сл. 8.7. Ова линија се често назива ζ-правом. Анализом израза (8.19) се може показати, да са повећањем ω_n енвелопа одзива брже опада, а такође се повећава и фреквенција осцилација. Другим речима, расте брзина

одзива. То заправно значи, да ће за исте вредности ζ, одзив система имати квалитативно исти облик, али ће он бити сабијен или развучен по временској оси, у зависности од ω_n, што је илустровано на сл. 8.8.

Подсетимо се да је ова анализа у временском домену започета посматрањем механичког система са сл. 8.5. С обзиром да смо у анализи претпоставили да је $K = 1$, ординате графикона са сл. 8.7 и сл. 8.8 треба помножити вредношћу појачања $K = 1/\sqrt{mc}$ да би се добиле праве вредности. Без обзира на ову промену размере, карактер понашања система, као и његова брзина, према (8.10), одређени су параметрима механичког система. Систем је утолико бржи што је маса мања, а опруга крућа. Фактор релативног пригушења система зависи од сва три параметра, али ако трења нема, $b = 0$, онда је систем непригушен.

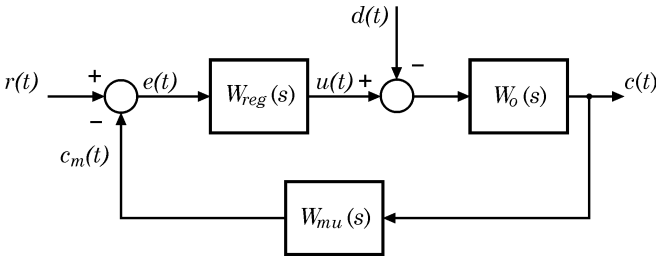


Слика 8.8: Одзиви система другог реда за различите вредности сопствене природне непригушене фреквенције

Након ове анализе понашања система другог реда без коначних нула, подсетимо се још једном да се понашање многих система може успешно апроксимирати понашањем система другог реда. При томе, полови функције преноса који описују понашање система се називају доминантним паром полова.

Вратимо се сада проблему управљања линеарним системом са једним улазом и једним излазом и негативном повратном спрегом. Изглед управљачког система је дат на сл. 8.9, где је са $W_o(s)$ означена функција преноса објекта управљања, са $W_{mu}(s)$ функција преноса мерног уређаја, а са $W_{reg}(s)$ функција преноса управљачког уређаја.

Уочимо да је деловање поремећаја на систем представљено сигналом d који се одузима од управљачког сигнала u који долази из управљачког уређаја па се

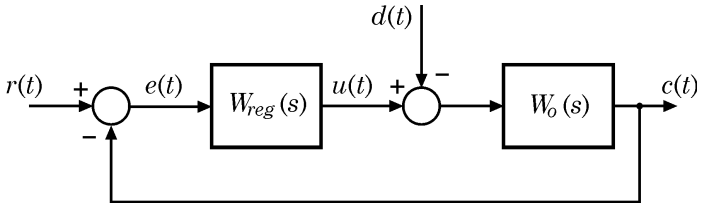


Слика 8.9: Блок схема линеарног система управљања са једним улазом и једним излазом

деловање спољашњих поремећаја може схватити као "кварење"управљачког сигнала који делује као улаз у објекат управљања.

Уведимо још једно упрошћење. Претпоставимо да је мерни уређај такав, да је мерени сигнал једнак излазном сигналу, односно да је функција преноса мерног уређаја $W_{mu}(s) = 1$. Ова претпоставка је врло често оправдана у реалним системима. Чак и када претпоставка није задовољена, систем можемо трансформисати тако да сматрамо да излаз из система, није сигнал $c(t)$, већ мерени сигнал $c_m(t)$.

У сваком случају, поједностављени модел система има изглед као на сл. 8.10. Због тога што се сигнал излаза враћа директно (без појачања) на улаз система, овакав систем се назива системом са јединичном негативном повратном спрегом.



Слика 8.10: Блок схема линеарног система управљања са јединичном негативном повратном спрегом

С обзиром да је систем линеаран, применом принципа суперпозиције и правила алгебре блокова, лако се може добити израз за излазни сигнал система у облику:

$$C(s) = \frac{W_{reg}(s)W_o(s)}{1 + W_{reg}(s)W_o(s)}R(s) - \frac{W_o(s)}{1 + W_{reg}(s)W_o(s)}D(s), \tag{8.22}$$

где је $C(s)$ комплекни лик излазног сигнала, а $R(s)$ и $D(s)$ су комплексни ликови референтног и сигнала поремећаја, респективно.

Већ смо видели да је управљачки задатак дефинисан тако да излазни сигнал прати референтни, или, што је еквивалетно, да сигнал грешке буде једнак нули. Применом сличне анализе, лако се може одредити израз за сигнал

грешке у комплексном домену:

$$E(s) = \frac{1}{1 + W_{reg}(s)W_o(s)}R(s) + \frac{W_o(s)}{1 + W_{reg}(s)W_o(s)}D(s). \tag{8.23}$$

Решавање задатка управљања се своди на избор структуре и параметара управљачког уређаја који ће обезбедити да сигнал грешке током времена буде једнак нули.

Код анализе одзива система другог реда, видели смо да је одзиву, у зависности од карактера система, потребно неко време пре него што се устали. Због тога одзив система можемо поделити на два дела. Први део, у којем се одзив мења током времена, назваћемо прелазним процесом, а други део, након довољно дугог времена, када промене одзива више нема, називаћемо стационарним стањем.

Током прелазног процеса, од интереса је понашање система које је, пре свега, одређено положајем пара доминантних полова. На основу жељеног понашања система, бирамо карактер одзива система, односно усвајамо фактор релативног пригушења ζ. На основу жељене брзине одзива, усваја се сопствена природна непригушена учестаност ω_n. Управљачки систем се пројектује тако што се бира његова структура и параметри у складу са жељеним положајем полова функције спрегнутог преноса.

У стационарном стању је од интереса величина грешке која у систему постоји, али желимо да она буде што је могуће мања, односно једнака нули. Грешка се може одредити из израза (??). С обзиром да нас интересује вредност након довољно дугог времена, односно стационарно стање, можемо се послужити граничном теоремом Лапласове трансформације, чиме се добија

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s), \tag{8.24}$$

па је анализа грешке значајно поједностављена. Анализа грешке у стационарном стању такође утиче на структуру и параметре регулатора.

Размотримо сада неколико најчешћих типова линеарних регулатора.

8.1.2 Линеарни управљачки закони

Искуство је показало да се многи управљачки проблеми у пракси могу успешно решити применом само три основна линеарна управљачка закона: пропорционалног (П), диференцијалног (D) и интегралног (I), као и њиховим комбинацијама.

Пропорционални закон управљања одређен је изразом

$$u(t) = K_P \cdot e(t), \tag{8.25}$$

односно, функцијом преноса регулатора

$$W_{r_P}(s) = K_P, \tag{8.26}$$

у којој је са K_P означено појачање пропорционалног дејства. На сличан начин, диференцијални закон управљања је одређен изразом

$$u(t) = K_D \cdot \dot{e}(t) = K_D \cdot \frac{d}{dt} e(t), \tag{8.27}$$

односно функцијом преноса

$$W_{r_D}(s) = K_D \cdot s, \tag{8.28}$$

где је K_D појачање диференцијалног дејства. Коначно, интегрални закон управљања дат је изразом у временском домену

$$u(t) = K_I \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau = \frac{1}{T_I} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau, \tag{8.29}$$

односно функцијом преноса

$$W_{r_I}(s) = \frac{K_I}{s} = \frac{1}{s \cdot T_I}, \tag{8.30}$$

у којој је K_I појачање, а T_I временска константа интегралног дејства.

Рецимо одмах да се диференцијални управљачки закон никада не примењује самостално, јер он производи управљачко дејство само када постоји промена грешке, па не делује у стационарном стању. Такође се и интегрални регулатор врло ретко самостално примењује. Најчешћа примена ова два типа управљачких закона је у комбинацији са пропорционалним законом.

Пропорционалнодиференцијални закон, или ПД управљање, комбинација је два закона

$$u(t) = K_P e(t) + K_D \dot{e}(t), \tag{8.31}$$

односно, функција преноса регулатора дата је са

$$W_{r_{PD}}(s) = K_P + sK_D = K_P(1 + T_D s), \tag{8.32}$$

где је са $T_D = K_D/K_P$ означена временска константа диференцијалног дејства.

На сличан начин се дефинише и пропорционалноинтегрални закон управљања, или ПИ регулатор, као

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau, \tag{8.33}$$

односно, функција преноса ПИ регулатора одређена је са

$$W_{r_{PI}}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_{PI} \frac{1 + sT_{PI}}{s}, \tag{8.34}$$

где је $K_{PI} = K_P$ појачање, а $T_{PI} = K_P/K_I$ временска константа ПИ регулатора.

Табела 8.1: Утицај повећања параметара регулатора на одзив система

Пораст дејства	грешка у стационарном стању	брзина реаговања	прескок и осцилаторност
П	↑	↑	↓
I	↓	↑	↑
D	-	↓	↓

Коначно, у индустријској аутоматизацији, најчешће се срећу такозвани ПИД регулатори, који су комбинација сва три управљачка дејства

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau + K_D \frac{d}{dt}e(t), \tag{8.35}$$

чија је функција преноса дата са

$$W_{r_{PID}}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + sK_D = \frac{K_I + sK_P + s^2K_D}{s}. \tag{8.36}$$

Напоменимо да се подешавањем појачања ПИД регулатора, односно, постављањем неког од параметара појачања на нулу, може остварити П, ПД, или ПИ регулатор, што се у пракси често користи.

Поступак подешавања параметара регулатора могуће је извести аналитички, када је познат модел објекта управљања. Међутим, у индустријским применама врло често не познајемо тачне моделе, нити се може организовати експеримент у циљу квалитетне идентификације модела. Због тога су развијене различите методе за приближно подешавање регулатора. Параметри регулатора се могу такође подесити и на основу искуства, тј. познавањем утицаја сваког од параметара на карактеристике одзива система. Утицаји повећања појачања регулатора на одзив система приказани су у Табели 8.1.

Видимо да су брзина реаговања система, и прескок и осцилаторност, у директној вези. Што је брзина реаговања већа, већа је и могућност да дође до прескока и осцилација и обрнуто. Такође видимо да диференцијално дејство не утиче на грешку система у устаљеном стању, док повећање пропорционалног и интегралног дејства смањује грешке устаљеног стања.

Размотримо аналитички начин подешавања регулатора, да бисмо сагледали опције које су нам на располагању.

Претпоставићемо да је регулатор ПИД типа, чија функција преноса је дата изразом (8.36). Претпоставићемо такође да је објекат управљања дат функцијом преноса облика

$$W_o(s) = \frac{1}{s^2 + bs + c}. \tag{8.37}$$

Изрази ће најпре бити изведени за општи случај, а онда ће бити размотрено неколико могућности. Анализираћемо П, ПД, ПИ и ПИД регулатор, тако што

ћемо извести изразе за ПИД регулатор, а затим ћемо, када је то потребно, сводити одговарајућа појачања регулатора на нулу. Потражимо сада функцију спрегнутог преноса од референтног улаза до излаза система, на основу израза (8.22):

$$W_s^R(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{W_{reg}W_o}{1 + W_{reg}W_o}. \tag{8.38}$$

Сменом израза (8.36) и (8.37) у (8.38), након неколико трансформација се добија

$$W_s^R(s) = \frac{s^2K_D + sK_P + K_I}{s^3 + s^2(b + K_D) + s(c + K_P) + K_I}. \tag{8.39}$$

Потражимо такође, на основу израза (**??**), и функције преноса по грешци, у односу на рефернтни улаз и поремећај. У односу на референтни улаз система, добија се функција преноса

$$W_E^R(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + W_{reg}W_o}, \tag{8.40}$$

док се у односу на поремећај добија функција преноса облика

$$W_E^D(s) = \frac{E(s)}{D(s)} = \frac{W_o}{1 + W_{reg}W_o}. \tag{8.41}$$

Сменом израза (8.36) и (8.37) у (8.40), односно (8.41) добијају се следећи изрази:

$$W_E^R(s) = \frac{s(s^2 + sb + c)}{s^3 + s^2(b + K_D) + s(c + K_P) + K_I}, \tag{8.42}$$

$$W_E^D(s) = \frac{s}{s^3 + s^2(b + K_D) + s(c + K_P) + K_I}. \tag{8.43}$$

Размотримо сада понашање система са различитим типовима регулатора.

П регулатор

Регулатор П типа је окарактерисан параметрима $K_D = 0$ и $K_I = 0$. Сменом ових вредности у опште изразе (8.39),(8.42), и (8.43), они се поједностављују и постају

$$W_s^R(s) = \frac{K_P}{s^2 + sb + (c + K_P)}, \tag{8.44}$$

$$W_E^R(s) = \frac{s^2 + sb + c}{s^2 + sb + (c + K_P)}, \tag{8.45}$$

$$W_E^D(s) = \frac{1}{s^2 + sb + (c + K_P)}. \tag{8.46}$$

Из (8.44), видимо да је функција спрегнутог преноса система у односу на референтни улаз другог реда без коначних нула. Такву функцију преноса смо већ раније подробно испитали, и видели да карактер прелазног режима зависи од положаја корена карактеристичне једначине (8.16) која је овде поново дата

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0. \tag{8.47}$$

Поређењем коефицијената карактеристичне једначине и имениоца израза (8.44), уочавамо да динамику система не можемо произвољно одредити. Наиме, с обзиром да у систему постоји само један подешљив параметар K_P, не можемо истовремено изабрати произвољан фактор пригушења ζ и учестаност ω_n. Заиста, изједначавањем коефицијената добија се

$$c + K_P = \omega_n^2 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{c + K_P}, \tag{8.48}$$

односно,

$$2\zeta\omega_n = b \Rightarrow \zeta = \frac{b}{2\sqrt{c + K_P}}. \tag{8.49}$$

На пример, ако изаберемо K_P у складу са (8.48) тако да подесимо ω_n, онда је ζ одређено са (8.49), и обрнуто.

Можемо према томе закључити да примена П регулатора са објектом другог реда не дозвољава произвољно подешавање динамике система у прелазном режиму.

Размотримо сада грешке у стационарном стању у овом систему. Претпоставимо да су и референтни сигнал, и сигнал поремећаја константни. Примена граничне теореме Лапласове трансформације (8.24) тада даје израз за грешку у односу на референтни сигнал

$$e^R(\infty) = \lim_{s\to 0} sW_E^R(s)\frac{r}{s} = \frac{c}{c + K_P}r, \tag{8.50}$$

где је r вредност константног референтног сигнала. Видимо да је грешка коначна и пропорционална величини улазног сигнала, а обрнуто пропорционална појачању пропорционалног дејства K_P. Грешка у стационарном стању се, у односу на референтни сигнал, може елиминисати само ако је појачање бесконачно велико, што наравно није остварив о.

Слична анализа за сигнал грешке у односу на сигнал поремећаја даје израз

$$e^D(\infty) = \lim_{s\to 0} sW_E^D(s)\frac{d}{s} = \frac{1}{c + K_P}d, \tag{8.51}$$

где је са д означена величина константног сигнала поремећаја. Видимо да се дејство константних поремећаја не може у потпуности елиминисати, а да грешка опада са повећањем појачања.

Ако на улазу система делује сигнал који није константан већ је нпр. растућа функција времена, регулатор не може да елиминише грешку, шта више, грешка ће током времена расти. То такође важи и за дејство сигнала поремећаја који су растуће функције времена.

Према томе, можемо закључити да примена П регулатора не омогућава потпуно управљање динамиком прелазног процеса. Осим тога, доводи до грешака у стационарном стању, чак и без дејства поремећаја. Грешке се могу донекле смањити, повећањем појачања. Да закључимо, П регулатор обезбеђује ограничене перфомансе система, како у погледу прелазног процеса, тако и у погледу стационарног стања.

ПД регулатор

Размотримо сада ПД регулатор, односно када у општим изразима усвојимо да је $K_I = 0$. Сменом у (8.39),(8.42), и (8.43), се добија

$$W_s^R(s) = \frac{sK_D + K_P}{s^2 + s(b + K_D) + (c + K_P)}, \tag{8.52}$$

$$W_E^R(s) = \frac{s^2 + bs + c}{s^2 + s(b + K_D) + (c + K_P)}, \tag{8.53}$$

$$W_E^D(s) = \frac{1}{s^2 + s(b + K_D) + (c + K_P)}. \tag{8.54}$$

Видимо да је именилац функције преноса (8.52) другог реда, а да коефицијенти зависе од два параметра регулатора. То значи да се карактер и брзина прелазног процеса могу произвољно подесити избором одговарајућег пара полова, односно фактора релативног пригушења ζ и учестаности ω_n. Поређењем коефицијената имениоца (8.52), са карактеристичном једначином система другог реда (8.47), видимо да се параметри регулатора могу изабрати у складу са

$$K_P = \omega_n^2 - c, \tag{8.55}$$

$$K_D = 2\zeta\omega_n - b. \tag{8.56}$$

Анализа сигнала грешке у стационарном стању за константан референтни сигнал и константне поремећаје даће исти резултат као и у случају П регулатора, односно, постојаће грешка у устаљеном стању.

Можемо да закључимо, да додавање диференцијалног дејства не утиче на понашање система у устаљеном стању, односно не може се додатно смањити стационарна грешка али прелазни процес можемо подесити по жељи.

ПИ регулатор

Размотримо сада ПИ регулатор, односно када у (8.39),(8.42), и (8.43) сменимо $K_D = 0$. У том случају се добија

$$W_s^R(s) = \frac{sK_P + K_I}{s^3 + s^2 b + s(c + K_P) + K_I}, \tag{8.57}$$

$$W_E^R(s) = \frac{s(s^2 + bs + c)}{s^3 + s^2 b + s(c + K_P) + K_I}, \tag{8.58}$$

$$W_E^D(s) = \frac{s}{s^3 + s^2 b + s(c + K_P) + K_I}. \tag{8.59}$$

Видимо да је сада именилац функције преноса (8.57) трећег реда, а да коефицијенти зависе од два параметра регулатора. Напишимо израз за карактеристичну једначину система трећег реда у облику

$$(s + \sigma)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = 0. \tag{8.60}$$

где је, као и раније, положај два пола одређен параметрима ζ и ω_n, док је положај трећег, реалног пола одређен параметром σ. Да би се осигурало да прелазни процес има карактер одређен положајем доминантних полова одређених са ζ и ω_n, обично се усваја $\sigma \leq 5\zeta\omega_n$.

Множењем израза у заградама (8.60), и изједначавањем са коефицијентима имениоца израза (8.57) добијамо следеће три једначине

$$K_I = \sigma\omega_n^2, \tag{8.61}$$

$$K_P = \omega_n^2 + 2\xi\omega_n - c, \tag{8.62}$$

$$\sigma + 2\zeta\omega_n = b. \tag{8.63}$$

Из последње једначине закључујемо да три пројектна параметра, ζ, ω_n и σ нису међусобно независна, па се динамика прелазног процеса ни у овом случају не може произвољно подесити. На основу два изабрана праметра, трећи се израчунава, као и коефицијенти појачања регулатора.

Размотримо сада грешке у систему, најпре ако су и референтни улаз и сигнал поремећаја константне величине. Израз за грешку у стационарном стању услед дејства референтног сигнала сада постаје

$$e^R(\infty) = \lim_{s\to 0} sW_E^R(s)\frac{r_0}{s} = 0, \tag{8.64}$$

односно, систем може идеално, без грешке, да прати константан улазни сигнал. Грешка је једнака нули захваљујући чињеници да се у изразу (8.58) појављује фактор s у бројиоцу, а он је директна последица постојања интегралног дејства у регулатору.

На сличан начин, и грешка услед дејства поремећаја постаје

$$e^D(\infty) = \lim_{s\to 0} sW_E^D(s)\frac{d_0}{s} = 0, \tag{8.65}$$

односно дејство константних поремећаја може се у потпуности отклонити. Вредност грешке стационарног стања на нулу своди поново фактор у бројиоцу израза (8.64), који је такође последица интегралног дејства ПИ регулатора.

Допустимо сада да на референтном улазу система делује нагибни сигнал. Тада је грешка у систему у стационарном стању дата са

$$e^R(\infty) = \lim_{s\to 0} sW_E^R \frac{r_1}{s^2} = \frac{c}{K_I} r, \tag{8.66}$$

где је са r_1 означен нагиб референтног сигнала $r(t) = r_1 t$. Видимо да је грешка праћења коначна, и обрнуто пропорционална појачању интегралног дела регулатора.

На сличан начин, ако претпоставимо да је и сигнал поремећаја нагибна функција, грешка у систему постаје

$$e^D(\infty) = \lim_{s\to 0} sW_E^D(s) \frac{d_1}{s^2} = \frac{1}{K_I} d_1, \tag{8.67}$$

где је d_1 нагиб сигнала поремећаја. Видимо да је грешка коначна, и постаје све мања са повећањем појачања интегралног дејства.

Можемо дакле закључити да ПИ регулатор примењен на систем другог реда обезбеђује идеално праћење константног улазног сигнала и у потпуности отклања дејство константних поремећаја. Друга особеност примене ПИ регулатора огледа се у могућности произвољног подешења динамике прелазног процеса.

ПИД регулатор

У претходним анализама је показано да у случају објекта управљања другог реда, П регулатор није довољан ни за подешавање прелазног процеса, нити за елиминисање грешака у стационарном стању. Додавањем D дејства, успостављена је потпуна контрола само над прелазним процесом. Додавањем I дејства, елиминисали смо грешке у устаљеном стању за константни референтни сигнал и константни сигнал поремећаја. Размотримо сада ПИД регулатор тј. изразе (8.39), (8.42) и (8.43), који су изведени за ПИД регулатор и објекат другог реда.

Из израза (8.39) се може видети да је динамика система поново трећег реда. Поређењем коефицијената имениоца израза (8.39), са коефицијентима карактеристичне једначине система трећег реда (8.60), добијамо три релације

$$K_I = \sigma\omega_n^2, \tag{8.68}$$

$$K_P = \omega_n^2 + 2\zeta\omega_n\sigma - c, \tag{8.69}$$

$$K_D = \sigma + 2\zeta\omega_n - b. \tag{8.70}$$

С обзиром да сада имамо три непозната појачања регулатора, и три параметра која карактеришу прелазни процес, ζ, ω_n и σ, динамика прелазног процеса се може произвољно подесити.

За анализу грешке у односу на референтни сигнал, размотримо израз (8.42). Види се да постоји фактор s у бројиоцу, тако да ће, као и код ПИ регулатора, грешка у стационарном стању за константан референтни сигнал бити једнака нули. Такође и израз (8.43) (грешка услед поремећаја) има фактор s у бројиоцу, па ПИД регулатор, као и ПИ, успешно отклања дејство константних поремећаја.

Уопште говорећи, видимо да ПИД регулатор заиста омогућује и подешавање динамике прелазног процеса, као и елиминацију грешака у устаљеном стању за константне сигнале побуде, односно да комбинује добре особине ПД и ПИ регулатора појединачно, кад је објекат управљања другог реда.

Као што је већ речено, многи системи вишег реда се могу успешно апроксимирати системима другог реда, те из тог разлога је ПИД регулатор нашао велику примену у индустријској пракси. Напоменимо још, да када функција спрегнутог преноса, поред пара доминантних полова у имениоцу, поседује и коначне нуле, и/или трећи пол, прелазни процес није у потпуности одређен положајем доминантних полова. Другим речима, и коначне нуле, и трећи пол, утичу и на карактер и на брзину прелазног процеса. Ми смо у нашем излагању ту чињеницу занемарили, а читаоци које ова материја дубље интересује се упућују на одговарајућу литературу из области аутоматског управљања.

8.2 УПРАВЉАЊЕ КРЕТАЊЕМ РОБОТА

У поређењу са управљањем класичним објектима аутоматског управљања управљање кретањем индустријског робота има одређене специфичности. Пре свега треба напоменути да ће овде бити разматрано само управљање слободним кретањем, при чему термин слободно кретање значи да врх робота није у контакту са околином, већ да се слободно креће у простору.

У многим задацима се захтева да робот током кретања оствари и одржава контакт са околином при чему поред управљања позицијом треба управљати и оствареном контактном силом (најчешће њеним интензитетом). Овакви задаци се називају контактним и њима се у овој књизи нећемо бавити.

Иако су основне поставке исте, управљање слободним кретањем робота је значајно сложеније од раније наведених примера линеарних система са једним улазом и једним излазом. Основно разлог је сложеност, пре свега динамичког, понашања робота. Подсетимо се да је модел динамичког понашања робота дат једначином

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}, \tag{8.71}$$

где је $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ инерцијална матрица, $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ је вектор центрипеталних/центрифугалних и Кориолисових сила, $\mathbf{G}$ вектор гравитационих сила, $\mathbf{q}$ је вектор генералисаних координата, $\dot{\mathbf{q}}$ вектор генералисаних брзина, $\ddot{\mathbf{q}}$ вектор генералисаних убрзања, а $\boldsymbol{\tau}$ је вектор генералисаних погонских сила односно момената. У оваквом моделу објекта управљања $\boldsymbol{\tau}$ је управљачки улаз, а излаз из објекта управљања је $\mathbf{q}$, односно остварена позиција зглобова.

У претходном поглављу смо размотрили и различите начине планирања трајекторија, што са аспекта управљања представља генерисање референтих трајекторија које робот треба да оствари. Задатак који овде разматрамо је одређивање управљачког сигнала $\boldsymbol{\tau}(t)$ који ће довести до тога да остварена

позиција зглобова робота $\mathbf{q}(t)$ верно прати жељене референтне вредности $\mathbf{q}_{ref}(t)$.

У овом тренутку је погодно да се укаже на још неколико специфичности проблема управљања кретањем робота. Пре свега, модел динамике представља матричну диференцијалну једначину другог реда, у којој су и излазна $\mathbf{q}(t)$, и управљачка величина $\boldsymbol{\tau}(t)$ вектори димензија $n \times 1$, где је n број степени слободе, односно, број зглобова робота. То значи да је објекат управљања мултиваријабилан, тј. да поседује n излазних $q_1, q_2, \ldots, q_n$, и исто толико управљачких величина $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$.

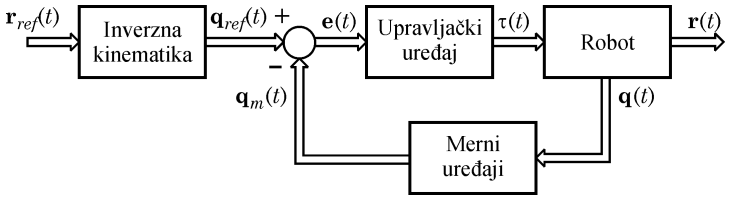
Даље, модел (8.71) је изразито нелинеаран. Ова нелинеарност огледа се на неколико начина. Најпре, ако робот поседује ротационе зглобове, онда коефицијенти у матрицама $\mathbf{H}(\mathbf{q})$, $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ и $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ садрже тригонометријске изразе у функцији тренутног положаја зглобова. Поред тога, вектор $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ садржи елементе типа $\dot{q}_i \cdot \dot{q}_j$, односно производе брзина зглобова, који представљају центрифугалне/центрипеталне силе, за $i = j$, односно, Кориолисове силе, за $i \neq j$.

І на крају треба истаћи да је роботски механизам типа кинематског ланца изразито спрегнут у смислу да кретање било ког зглоба робота утиче на оптерећење сваког од преосталих зглобова. Сви ови утицаји су укључени у модел динамике како кроз вандијагоналне елементе матрице инерције $\mathbf{H}(\mathbf{q})$, тако и кроз компоненте вектора $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, односно $\mathbf{G}(\mathbf{q})$. Осим тога, роботски механизам типа кинематског ланца је у овом тренутку једини механизам познат у техници који током кретања мења своју инерцијалност. Наиме, инерцијалност коју "осећа"неки зглоб (дијагонални елементи H_{ii} матрице $\mathbf{H}(\mathbf{q})$) зависи од тренутног положаја свих сегмената који се у кинематском ланцу налазе даље. С обзиром да се сви зглобови симултано крећу, вредности ових елемената се мењају. Према томе, задатак управљања роботским системом типа кинематског ланца преставља један од најтежих задатака управљања уопште јер се управља мулитваријабилним, нелинеарним и спрегнутим системом.

Укажимо на још једну специфичност ових механизама. При обављању задатка робота од посебног је интереса кретање његовог врха, без обзира да ли се на врху налази алат којим робот обавља задатак, или хватаљка којом држи радни предмет. Са тог аспекта је најприродније задатак описати или задати у простору спољашњих координата у радном простору робота. Са друге стране, кретање се реализује кретањем зглобова робота, којем је, природно, придружен простор унутрашњих координата, па је најлогичније да се управљање кретањем реализује у овом простору.

Стога се, логично, намећу и две управљачке стратегије: управљање унутрашњим или управљање спољашњим координатама. У оба случаја управљачких стратегија, мора постојати механизам превођења кретања робота из једног простора у други. Начелна схема управљања кретањем робота по унутрашњим координатама приказана је на сл. 8.11. Приметимо да су сви сигнали означени стрелицама које су приказане двоструким линијама, што симболизује њихову векторску природу. Задатак, односно кретање робота, задаје се преко вектора референтног кретања по спољашњим координатама рреф. Коришћењем блока инверзне кинематике, задатак се затим преводи у простор унутрашњих координата, у коме ће се и извршавати. На основу вектора сигнала грешке $e(t)$ управљачки уређај формира вектор управљачих сигнала $\boldsymbol{\tau}(t)$, који реализују

кретање зглобова манипулатора $\mathbf{q}(t)$ односно, његовог врха $\mathbf{r}(t)$.



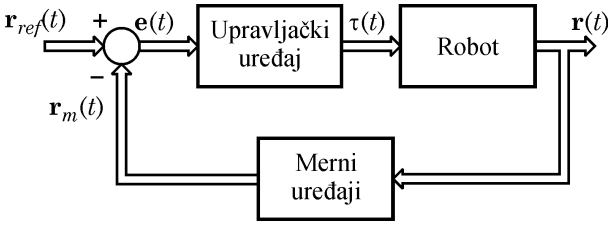
Слика 8.11: Блок схема система за реализацију управљања по унутрашњим координатама

Напоменимо још једном да мерни уређаји мере положаје зглобова, односно региструју стање унутрашњих координата, на основу њих се затвара повратна спрега, односно, формира сигнал грешке.

Овакав приступ управљању разлаже проблем управљања на два подзадатка: први је решавање инверзне кинематике, а затим следи формирање управљачких сигнала у простору унутрашњих координата. На тај начин, проблем управљања је олакшан, јер се решава у простору у коме је његово описивање природно.

Са сл. 8.11 лако се може уочити и потенцијална мана оваквог присупа управљању. Наиме, излазна величина, вектор положаја врха робота $\mathbf{r}(t)$, се не мери директно, и не учествује у формирању сигнала грешке. То значи да се ослањамо на моделе инвезне и директне кинематике за пресликавање простора спољашњих у простор унутрашњих координата, и обрнуто. Сва одступања модела од реалног система, која неминовно постоје, директно ће се одразити на нетачности у праћењу референтних сигнала. Такође, и ефекти који нису обухваћени моделом кинематике (еластичности и зазори у преносним механизмима, еластичности сегмената, итд), могу у значајној мери утицати на тачност остваривања положаја врха робота $\mathbf{r}(t)$.

Све ове нежељене ефекте могуће је одстранити применом управљања по спољашњим коодинатама, као што је то приказано на сл. 8.12.



Слика 8.12: Блок схема система за реализацију управљања по спољашњим координатама

У овом случају, сигнал грешке се формира на основу задатог референтног кретања, и измереног остареног кретања врха робота. На тај начин, повратна спрега је затворена директно по управљаним променљивим, па се, због затварања повратне спреге, у знатној мери смањују грешке услед одступања параметара кинематског модела од параметара стварног система. Међутим,

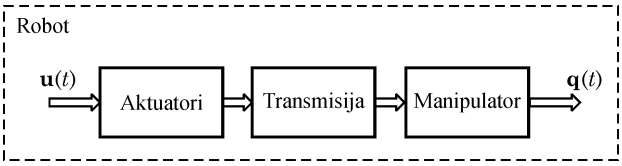
управљачки уређај сада мора бити знатно сложенији, јер у себи мора да садржи механизам за превођење грешке из простора спољашњих координата у управљачке величине које делују у простору унутрашњих координата. Другим речима, процес решавања инверзне кинематике је обухваћен повратном спрегом. На овом месту треба још нагласити да се код већине робота данас, положај његовог врха не мери директно, како је то приказано на сл. 8.12, већ посредно. Мере се вредности координата у зглобовима, а затим се положај врха израчунава решавањем директног кинематског задатка.

8.2.1 Комплетан модел динамике робота

У оба претходна случаја (сл. 8.11 и 8.12), модел динамике робота представљен је једним блоком, при чему је претпостављено да је математички модел тог блока дат једначином (8.71). Међутим, модел представљен једначином (8.71) обухвата само динамику механичке структуре манипулатора. Улаз у модел су погонске силе и моменти, а излаз позиције зглобова. Не треба заборавити да се за генерисање погонских сила користе актуатори, било у виду електричних мотора, или пнеуматских или хидрауличних цилиндара. Актуатори су такође динамички системи, чије се понашање може описати одговарајућим математичким моделом.

Осим тога, као што смо већ видели, у многим практичним реализацијама конструкције робота се тежи да се актуатори не постављају директно у зглобове већ да се измештају на позиције на којима ће мање „погоршавати“ динамичке перформансе робота при чему су потребни посебни мехнизми за трансмисију погонских сила и момената од места актуатора до самог зглоба (нпр. ремени пренос, навојно вретено итд.). Механизми за трансмисију такође представљају динамичке системе, са својим математичким моделом.

Према томе, математички модел понашања робота, треба, поред модела динамике система крутих тела који формирају кинематски ланац (манипулатор), да обухвати и моделе актуатора и трансмисије, као што је то приказано на сл. 8.13. Управљачка величина је означена са $\mathbf{u}(t)$ и представља улаз у модел, док је излаз из модела вектор позиција зглобова $\mathbf{q}(t)$. Величине, односно сигнали, који се јављају између појединих подсистема нису посебно означени, али јасно је да се унутар модела појављују моменти $\boldsymbol{\tau}(t)$ који делују на манипулатор. сл. 8.12.



Слика 8.13: Схематски приказ структуре математичког модела робота

Размотримо сада један од начина да се обједине модели актуатора, трансмисије и манипулатора, и тако добије комплетан модел динамике робота. Претпоставимо да су као актуатори употребљени мотори једносмерне струје са перманентним магнетима. Претпоставићемо, даље, да су мотори постављени директно у зглобове, као и да се енергија од мотора до зглоба преноси само

преко редуктора. Нека је модел динамике манипулатора дат у следећој форми:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}), \tag{8.72}$$

где је, у односу на једначину (8.71), моделу придружено и вискозно трење, дато изразом $\mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}}$, где је $\mathbf{F}_v$ дијагонална матрица која садржи коефицијенте вискозног трења за сваки зглоб манипулатора.

Модел (8.72) може се записати и у компактнијој форми, у облику:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \tag{8.73}$$

Поређењем чланова у изразима (8.72) и (8.73), лако закључујемо да важи

$$\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}). \tag{8.74}$$

Другим речима, сабирак $\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ садржи све компоненте динамичког модела механичке конфигурације осим инерцијаних.

Посматрајмо сада само један зглоб робота, на пример, i-ти. Једначина која описује динамику овог зглоба заправо је i-та врста матричне једначине (8.73), и може се написати у облику

$$H_{ii}\ddot{q}_i + \sum_{j \neq i} H_{ij}\ddot{q}_j + n_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \tau_i \tag{8.75}$$

где смо индексом i означили коефицијенте i-те врсте, док индекс j означава колоне. Први сабирак у једначини представља компоненту момента насталу услед појаве инерцијалне силе услед убрзавања i-тог зглоба. Коефицијент H_{ii} је дијагонални елемент матрице инерције, и представља сопствену инерцију посматраног зглоба. Други сабирак једначине (8.75) је сума момента која делује на i-ти зглоб услед инерцијалних сила које остали зглобови генеришу својим убрзаним кретањем. Према томе коефицијенти H_{ij} представљају унакрсне инерцијалне чланове матрице $\mathbf{H}$. Последњи сабирак са леве стране једначине (8.75) садржи моменте услед центрифугалних, Кориолисових и гравитационих сила, као и сила вискозног трења које делују у i-том зглобу. Сила односно моменат τ_i коју актуатор треба да оствари у посматраном зглобу робота мора да савлада све моменте који се јављају са леве стране једначине (8.75).

Нека сада у посматраном зглобу делује мотор једносмерне струје. Његово динамичко понашање се може описати са две једначине: једначином равнотеже електричног кола мотора и једначином која представља равнотежу момената на вратилу мотора. Једначина равнотеже електричног кола мотора је дата са:

$$u_i(t) = R_i \cdot i_i(t) + L_i\frac{di_i(t)}{dt} + K_{em_i} \cdot \dot{\theta}_i(t), \tag{8.76}$$

где је $u(t)$ напон на ротору мотора, $i(t)$ је струја ротора, R и L представљају отпорност, односно индуктивност роторских намотаја, K_{em} је напонска константа мотора, а $\dot{\theta}$ је угаона брзина обртања ротора. Индекс i уз сваку величину означава да се ради о мотору смештеном у i-том зглобу. Једначина (8.76) нам казује да се напон прикључен на ротор мотора једносмерне струје троши једним делом за савадавање отпора и индуктивности ротора, а другим за

савладавање индуковане електромоторне силе, изражене производом $K_{em_i}\dot{\theta}_i$. Претходној једначини треба придружити и једначину механичке равнотеже система:

$$K_{me_i} \cdot i_i(t) = B_i \cdot \dot{\theta}_i(t) + J_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} + T_i(t), \tag{8.77}$$

где је K_{me} константа момента, B је коефицијент вискозног трења, J је момент инерције ротора мотора, а $T(t)$ представља момент оптерећења који мотор уравнотежава. Индекс и поново означава припадност i-том зглобу. Производ $K_{me_i} i_i(t)$ представља заправо моменат који развија мотор једносмерне струје.

Веза између мотора и зглоба је остварена путем редуктора. Претпоставићемо да је редуктор идеалан, тј. да нема зазора између зупчаника, као и да нема губитака енергије. У том случају, веза између позиције вратила мотора и позиције зглоба дата је релацијом

$$\theta_i = N_{r_i} \cdot q_i, \tag{8.78}$$

где је N_r преносни однос редуктора који је овде дефинисан као количник броја обртаја мотора и броја обртаја излазног вратила редуктора. Приметимо да је $N_r > 1$, пошто се мотор обрће брже од зглоба робота. Веза између момента на осовини мотора, и момента на излазној осовини редуктора, односно у зглобу робота, је дата је релацијом

$$T_i = \frac{1}{N_{r_i}} \tau_i. \tag{8.79}$$

Видимо да је момент на излазу редуктора увећан N_r пута у односу на моменат који производи мотор, али је при томе број обртаја смањен.

Да би смо добили комплетан модел динамике робота, потребно је објединити једначине (8.75), (8.76), (8.77), (8.78), и (??). Најпре ћемо из једначине (8.76) израчунати струју ротора $i_i(t)$, сматрајући да се индуктивност ротора може занемарити, што је најчешће заиста случај код квалитетних мотора једносмерне струје са сталним магнетом. Тако добијени израз, убацићемо у једначину (8.77), која након сређивања постаје

$$J_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} + (B_i + \frac{K_{me_i} K_{em_i}}{R_i}) \cdot \dot{\theta}_i(t) + T_i(t) = \frac{K_{me_i}}{R_i} u(t). \tag{8.80}$$

У овој једначини све величине су изражене у односу на вратило мотора, односно на улазну осовину редуктора. Да бисмо једначину повезали са једначином динамике зглоба робота, потребно је да искористимо везе (8.78) и (??), чиме се добија

$$J_i N_{r_i} \cdot \ddot{q}_i(t) + (B_i + \frac{K_{me_i} K_{em_i}}{R_i}) N_{r_i} \cdot \dot{q}_i(t) + \frac{1}{N_{r_i}} \tau_i(t) = \frac{K_{me_i}}{R_i} u(t), \tag{8.81}$$

односно, након множења целе једначине са N_{r_i}

$$J_i N_{r_i}^2 \cdot \ddot{q}_i(t) + (B_i + \frac{K_{me_i} K_{em_i}}{R_i}) N_{r_i}^2 \cdot \dot{q}_i(t) + \tau_i(t) = \frac{N_{r_i} K_{me_i}}{R_i} u(t). \tag{8.82}$$

Видимо да се момент инерције ротора, као и коефицијенат вискозног и електричног трења пресликавају кроз редуктор увећани $N_{r_i}^2$ пута.

Сада можемо из једначине динамике зглоба робота (8.75) заменити израз за моменат τ_i који се предаје зглобу робота, чиме се добија

$$\begin{aligned} J_i N_{r_i}^2 \cdot \ddot{q}_i(t) + (B_i + \frac{K_{me_i} K_{em_i}}{R_i}) N_{r_i}^2 \cdot \dot{q}_i(t) + \\ + H_{ii}\ddot{q}_i(t) + \sum_{i \neq j} H_{ij}\ddot{q}_j(t) + n_i(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \frac{N_{r_i} K_{me_i}}{R_i} u(t). \end{aligned} \tag{8.83}$$

Након груписања чланова уз изводе по $q_i(t)$ једначина постаје

$$\begin{aligned} (H_{ii} + J_i N_{r_i}^2) \cdot \ddot{q}_i(t) + \sum_{i \neq j} H_{ij}\ddot{q}_j(t) + \\ + \left((B_i + \frac{K_{me,i} K_{em,i}}{R_i}) N_{r_i}^2 \cdot \dot{q}_i(t) + n_i(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \right) = \frac{N_{r_i} K_{me_i}}{R_i} u(t). \end{aligned} \tag{8.84}$$

Можемо уочити да једначина (8.84) има исту структуру као и једначина (8.75) па се може записати у облику

$$H''_{ii}\ddot{q}_i(t) + \sum_{j \neq i} H_{ij}\ddot{q}_j(t) + n''_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{N_{r_i} K_{me_i}}{R_i} \cdot u(t), \tag{8.85}$$

где је

$$H''_{ii} = H_{ii} + N_{r_i}^2 J_i, \tag{8.86}$$

односно,

$$n''_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = n_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \left(B_i + \frac{K_{me_i} K_{em_i}}{R_i} \right) \cdot N_{r_i}^2 \cdot \dot{q}_i. \tag{8.87}$$

Видимо да је сопствени момент инерције H''_{ii} зглоба увећан за пресликану инерцију ротора мотора, а пресликано механичко трење мотора додато је преосталим компонентама динамике зглоба: центрипеталним и Кориолисовим силама, вискозном трењу самог зглоба, и гравитационим силама.

Ако се једначина (8.85) напише за све зглобове, односно за $i = 1, \ldots, n$, онда се и комплетан модел динамике робота може добити у матричној форми

$$\mathbf{H}''(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}''(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}(t) \tag{8.88}$$

где је $\mathbf{H}''(\mathbf{q})$ модификована матрица инерције дата са

$$\mathbf{H}''(\mathbf{q}) = \left[M''_{ij} \right] = \begin{cases} H_{ii} + N_{r_i}^2 J_i, & i = j \\ H_{ij} & i \neq j \end{cases} \tag{8.89}$$

док $\mathbf{n}''(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ представља вектор колону чији су појединачни чланови n_i'' дати са

$$n_i'' = n_i + \left(B_i + \frac{K_{me_i} K_{em_i}}{R_i} \right) N_{r_i}^2 \cdot \dot{q}_i \tag{8.90}$$

Матрица $\mathbf{K}$ представља константе пропорционалности

$$\mathbf{K} = diag(K_i) = diag(\frac{N_{r_i} K_{me_i}}{R_i}),\ i = 1, \ldots, n. \tag{8.91}$$

Приметимо да једначина комплетног модела динамике робота са актуаторима и трансмисијом (8.88) има потпуно исти облик као и једначина (8.73), с тим што сада улазну величину модела представљају вектори напона доведени на роторе мотора. То значи, да при разматрању проблема управљања можемо равноправно баратати, било моделом механике манипулатора (8.73) односно (8.72), било моделом комплетне динамике са актуаторима (8.88), сматрајући да се, уколико је потребно, модел механике манипулатора увек лако може модификовати тако да обухвати и модел актуатора и трансмисије.

Потребно је истаћи да постоје и актуатори и трансмисије, код којих се, приликом обједињавања модела са моделом механичке структуре робота, не може добити једначина облика (8.88), пре свега зато што у моделу актуатора постоје и друге величине које се динамички мењају, а такође, веза између позиција, брзина и момената са актуаторске стране трансмисије и са стране зглоба робота поседује одређену динамику. Тада се модел динамике обједињује тако што се пишу једначине у простору стања, и уводе нове променљиве стања, које ће обухватити ове динамичке везе. У сваком случају, та материја излази из домена ове књиге, а заинтересовани читаоци се упућују на богату литературу из ове области.

8.2.2 Утицај редуктора на линеаризацију и распрезање модела

Већ смо рекли да је динамика робота описана системом нелинеарих спрегнутих диференцијалних једначина другог реда. Када смо моделу механике робота придружили модел мотора једносмерне струје са редуктором, добили смо такође систем (8.88) нелинеарних спрегнутих диференцијалних једначина другог реда, док су њихови коефицијенти дати изразима (8.89) и (8.90).

Размотримо сада мало пажљивије израз за модификовану матрицу инерције (8.89). Видимо да модификација настаје тако што се коефицијенти на главној дијагонали матрице инерције увећавају за пресликану инерцију ротора мотора, док вандијагонални елементи остају непромењени. Подсетимо се да вандијагонални елементи матрице инерције у некој врсти представљају међусобне утицаје услед убрзања осталих зглобова на посматрани зглоб, док дијагонални елемент представља сопствену инерцију тог зглоба. С обзиром на то да је дијагонални елемент сада увећан, његов допринос укупној инерцијалној компоненти погонског момента, биће значајнији у односу на остале, вандијагоналне сабирке. Ово ће бити посебно изражено, ако је преносни однос редукора велики, на пример већи од 30. С обзиром на то да се инерција ротора мотора пресликава са $N_{r_i}^2$ на страну зглоба, она може бити увећана и преко 1000 пута, и тако постати најзначајнији сабирак у изразу. То заправо значи,

да се значајно смањује утицај убрзања осталих зглобова на посматрани зглоб и зависност од тренутног положаја, јер у збиру $H_{ii} + N_{r_i}^2 J_i$ у (8.89) сабирак H_{ii}, који зависи од положаја сегмената у остатку кинематског ланца, релативно мање утиче у односу на пресликану инерцију ротора мотора. Тиме се утицај променљиве инерције механизма умањује.

Сличан закључак може се извести и анализом израза (8.90). Модификовани модел се добија тако што се оригиналном коефицијенту n_i, који садржи и међусобне утицаје других зглобова (центрифугалне и Кориолисове силе), и нелинеарности (сви коефицијенти, а нарочито гравитационе компоненте, зависе од тренутног положаја робота), додаје трење које се јавља у мотору, увећано $N_{r_i}^2$ пута. Поновимо још једном, ако је преносни однос редуктора велики, овај сабирак може постати доминантан. Како он не зависи од кретања других зглобова, у великој мери је дошло до распрезања модела динамике. Такође долази и до извесног смањења зависности од тренутног положаја, али гравитациони елементи и даље нису до краја компензовани.

Према томе, можемо закључити, да примена редуктора, нарочито са великим преносним односима, може довести до линеаризације и распрезанања модела динамике. Другим речима, динамика самог мотора постаје доминантна у односу на динамику зглобова манипулатора. Из овог разматрања би се могао извести закључак да је пожељно имати што већи степен редукције. То наравно није тачно, пре свега, зато што су у претходним разматрањима потпуно занемарени зазори, и губици енергије у редуктору. Обе занемарене величине расту са повећањем степена редукције, тако да је потребан компромис при одабиру редуктора. О начину избора редуктора већ је дискутовано у претходним поглављима.

8.3 УПРАВЉАЊЕ ПО УНУТРАШЊИМ КООРДИНАТАМА

Модел динамике робота, који ћемо користити за синтезу управљања дат је једначином (8.72), коју ћемо, ради прегледности, овде поново написати:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}), \tag{8.92}$$

Већ је речено, да модел (8.92) описује спрегнути нелинеарни систем другог реда. Међутим, погодном трансформацијом модела, систем можемо представити као композицију два подсистема, од којих је један линеаран и распрегнут, а други садржи све нелинеарне ефекте, као и ефекте спрезања система.

Подсетимо се да се на главној дијагонали матрице инерције $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ налазе инерције које делују на посматрани зглоб услед његовог сопственог кретања, док вандијагонални елементи представљају инерцијалне утицаје на посматрани зглоб услед кретања других зглобова. Такође, ако робот поседује ротационе зглобове, елементи матрице инерције, па и дијагонални елементи, садрже тригонометријске изразе који зависе од тренутног положаја зглобова. Матрицу инерције можемо сада представити на следећи начин:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{H}} + \Delta\mathbf{H}(\mathbf{q}), \tag{8.93}$$

где је $\bar{\mathbf{H}}$ константна дијагонална матрица која садржи "усредњене"вредности сопствених инерција зглобова, односно дијагоналних елемената матрице $\mathbf{H}(\mathbf{q})$,

док матрица $\Delta\mathbf{H}(\mathbf{q})$ садржи све вандијагоналне елементе, као и променљиви део дијагоналних елемената полазне матрице. Сменом израза (8.93) у модел (8.92), и преуређењем редоследа сабирака добија се израз

$$\boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{H}}\mathbf{q} + \mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}} + \Delta\mathbf{H}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}), \tag{8.94}$$

у којем елементи матрица прва два сабирка не зависе од тренутног положаја и брзине, па представљају линеарне компоненте. Осим тога, матрице $\bar{\mathbf{H}}$ и $\mathbf{F}_v$ су дијагоналне, па нема спреге између зглобова. Преостала три сабирка представљају нелинеарни и спрегнути део система. Означимо тај део система са

$$\mathbf{d}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\ddot{\mathbf{q}}) = \Delta\mathbf{H}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}), \tag{8.95}$$

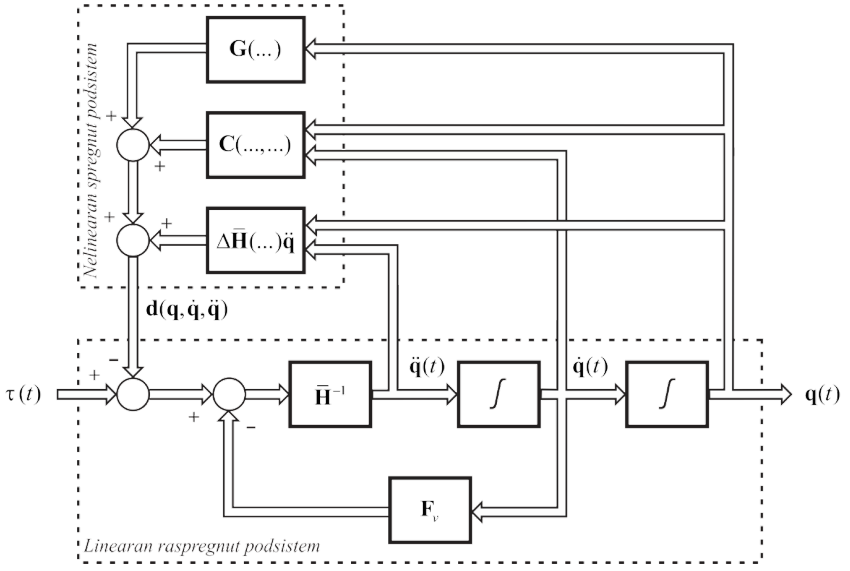
тако да се сада модел динамике може написати у облику

$$\boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{H}}\mathbf{q} + \mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{d}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\ddot{\mathbf{q}}), \tag{8.96}$$

односно,

$$\boldsymbol{\tau} - \mathbf{d}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\ddot{\mathbf{q}}) = \bar{\mathbf{H}}\mathbf{q} + \mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}}. \tag{8.97}$$

Модел динамике (8.96), односно (8.97), заједно са (??) можемо концептуално представити као што је приказано на сл. 8.15.



Слика 8.14: Блок схема модела динамике једног зглоба робота као спрега линеарног распрегнутог и нелинеарног спрегнутог подсистема

Линеарни део система састоји се од две каскадно повезане групе интегратора, и локалне повратне спреге по брзни. Улаз у овај подсистем је управљачки сигнал $\boldsymbol{\tau}(t)$, а излаз из система позиција зглобова $\mathbf{q}(t)$. Нелинеарни део система прима на улазу информације о текућој вредности позиције, брзине и убрзања зглобова, а на излазу се формира сигнал $\mathbf{d}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\ddot{\mathbf{q}})$. Формално, можемо

сматрати да сигнал $\mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ представља заправо поремећај за линеарни део система.

На основу ове анализе, можемо на различите начине приступити проблему управљања у простору унутрашњих координата. Ако занемаримо деловање поремећаја и с обзиром да је линеарни део система распрегнут, онда се задатак управљања роботом са n зглобова, односно управљање мултиваријабилним системом, своди на задатака управљања појединачним зглобовима, односно n система са једним улазом и једним излазом. Ако су регулатори добро пројектовани, они треба да елиминишу дејство поремећаја који делују на сваку од управљачких петљи зглобова.

Овакав приступ назива се децентрализовано управљање, и нарочито је оправдан, уколико су за пренос механичке енергије примењени редуктори са великим степеном редукције. Већ смо показали да у том случају динамика актуатора доминира над динамиком манипулатора, па је утицај поремећаја смањен.

Ако преносни односи редуктора нису велики, или, ако редуктора ни нема, као што је то случај код робота са директним погоном, тада занемаривање поремећаја може довести до значајних грешака у праћењу референтних сигнала. С обзиром на то да је нама позната структура сигнала који сматрамо поремећајем, а пошто познајемо модел динамике робота, можемо покушати да ове поремећаје компензујемо применом знања о моделу. То би требало да доведе до бољих резултата, с обзиром на то да се отклањају поремећаји, а не последице њиховог дејства. Имајући у виду да модел поремећаја, нелинеарни подсистем са сл. 8.15, захтева познавање стања целог робота, зглобови се не могу управљати више појединачно, већ је потребна нека врста централизованог управљања.

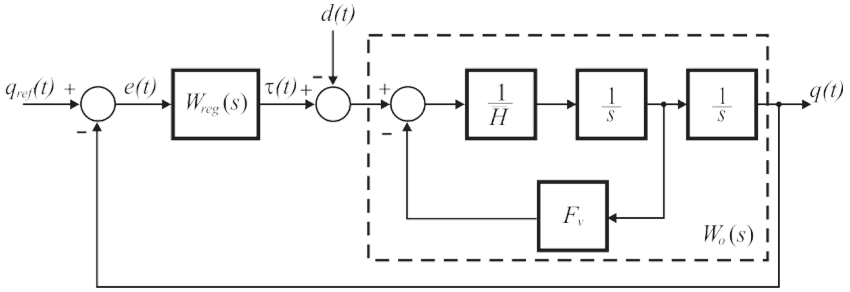
8.3.1 Децентрализовано управљање кретањем зглобова

У овом одељку ће бити размотрено децентрализовано управљања кретањем зглобова индустријског робота. Модел динамичког понашања је разложен на линеарни распрегнути и нелинеарни спрегнути део, при чему ћемо за управљање искористити само линеарни распрегнути део модела динамике робота. Утицај остатка система (који није узет у обзир) се третира као поремећај. Размотрићемо случај када су зглобови механичке конфигурације робота оснажени моторима једносмерне струје са редуктором.

Принципи децентрализованог управљања кретањем зглоба

Суштина овог прилаза је да се систем сматра линеарним (посматра се само линеарни део модела док се сви остали утицаји третирају као поремећај) и управљање узима у обзир само величине које су карактеристике дотичног зглоба. Према томе, модел робота је дат једначином (8.96), односно (8.97), уколико је члан $\mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ изостављен. Тада (8.96), односно (8.97), представаља линеаран распрегнути систем, па је задатак управљања роботом, сведен на n појединачних задатака управљања једним зглобом. Структура система за i-ти зглоб, приказана је на сл. 8.15. Код коефицијената матрице $\bar{\mathbf{H}}$ и $\mathbf{F}_v$ из i-те врсте модела, је због поједностављења израза, индекс i изостављен.

Повратна спрега је затворена по оствареној позицији зглоба $q(t)$. Референта величина је жељена позиција зглоба $q_{ref}(t)$. Део система уоквирен испрекиданом линијом представља заправо објекат управљања, док утицај остатка система сматрамо поремећајем који делује на систем и обележен је са $d(t)$. Функција преноса регулатора је означена са $W_{reg}(s)$, и задатак се своди на одређивање структуре и параметара регулатора тако да се обезбеди да излазна величина $q(t)$ верно прати референтну трајекторију $q_{ref}(t)$.



Слика 8.15: Струкурна блок схема линеарног модела једног зглоба

Функција преноса објекта управљања $W_o(s)$ се лако се може добити у форми:

$$W_o(s) = \frac{K_o}{s(1 + sT_o)}, \tag{8.98}$$

где је

$$K_o = \frac{1}{F_v}, \tag{8.99}$$

појачање објекта управљања, а

$$T_0 = \frac{\bar{H}}{F_v} \tag{8.100}$$

његова временска константа. Сагласно ранијим разматрањима, а с обзиром на чињеницу да је објекат управљања линеаран и другог реда, да бисмо управљали положајем пара доминантних полова, регулатор мора поседовати најмање ПД структуру,

$$W_{reg}(s) = K_P + s \cdot K_D, \tag{8.101}$$

где је као и раније, K_P појачање пропорционалног, а K_D појачање диференцијалног дејства.

Функција повратног преноса за овај систем је дата са:

$$W_p(s) = W_{reg}(s)W_o(s) = \frac{K_o(K_P + s \cdot K_D)}{s(1 + sT_o)} \tag{8.102}$$

тако да функција спрегнутог преноса у односу на референтни улаз сада постаје

$$W_s^R(s) = \frac{W_p(s)}{1 + W_p(s)} = \frac{\frac{K_o K_P}{T_o}\left(s\frac{K_D}{K_P} + 1\right)}{s^2 + s\frac{K_o K_D + 1}{T_o} + \frac{K_o K_P}{T_o}}. \tag{8.103}$$

Видимо да је именилац функције спрегнутог преноса другог реда, а да коефицијенти зависе од параметара ПД регулатора. Поређењем са коефицијентима жељене карактеристичне једначине

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0, \tag{8.104}$$

лако се могу одредити парметри регулатора

$$K_P = \omega_n^2 \frac{T_o}{K_o}, \tag{8.105}$$

односно,

$$K_D = \frac{2\zeta\omega_n T_o - 1}{K_o}, \tag{8.106}$$

где фактор релативног пригушења ζ одређује карактер прелазног режима одзива, док параметар ω_n који представља сопствену природну непригушену учестаност, одређује брзину одзива, а K_0 и T_0 дати су са (8.99) и (8.100).

Размотримо сада одступања која се могу јавити. Имајући у виду да је општи израз за одступања у праћењу референтних трајекторија (грешку), дат релацијом (**??**), сменом израза за функције преноса регулатора и објекта управљања, можемо израз за грешку написати у облику

$$E(s) = E^R(s) + E^D(s), \tag{8.107}$$

где су $E^R(s)$ (одступање од референтног сигнала услед немоделиране динамике реалног система) и $E^D(s)$ (грешка настала деловањем спољашњих поремећаја) дефинисани као

$$E^R(s) = \frac{s(1 + sT_o)}{s^2 T_o + s(K_o K_D + 1) + K_o K_D} R(s), \tag{8.108}$$

$$E^D(s) = \frac{K_0}{s^2 T_o + s(K_o K_D + 1) + K_o K_P} D(s). \tag{8.109}$$

Из израза за $E^R(s)$ видимо да ће грешка у стационарном стању, због присуства фактора s у бројиоцу, за константан улазни сигнал бити једнака нули, док је у случају нагибног референтног сигнала грешка дата са

$$e(\infty) = \frac{1}{K_o K_P} r_0, \tag{8.110}$$

где је r_0 нагиб референтног сигнала.

Уколико на систем делује константан поремећај, постојаће грешка дефинисана изразом $E^D(s)$, а вредност у стационарном стању је одређена изразом

$$e(\infty) = \frac{1}{K_P} d_0 \tag{8.111}$$

где је d_0 величина поремећаја. Видимо да се грешке позиционирања могу смањити повећавањем појачања K_P, али ПД регулатор није нарочито погодан за отклањање дејства оваквих поремећаја.

Применићемо сада ПИД регулатор, чија је структура дата једначином

$$W_{reg}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s = \frac{K_I + K_P \cdot s + K_D \cdot s^2}{s}, \tag{8.112}$$

где је са K_I обележено појачање интегралног дејства. Функција повратног преноса за овај систем сада постаје

$$W_p(s) = W_{req}(s) W_o(s) = \frac{K_o(K_I + K_P \cdot s + K_D \cdot s^2)}{s^2(1 + sT_o)} \tag{8.113}$$

тако да је функција спрегнутог преноса у односу на референтни улаз дата са

$$W_s^R(s) = \frac{W_p(s)}{1 + W_p(s)} = \frac{\frac{K_o}{T_o}\left(s^2 K_D + sK_P + K_I\right)}{s^3 + s^2 \frac{K_o K_D + 1}{T_o} + s\frac{K_o K_P}{T_o} + \frac{K_o K_I}{T_o}}. \tag{8.114}$$

Може се видети да је именилац функције спрегнутог преноса трећег реда, а да коефицијенти зависе од параметара ПИД регулатора. Жељена карактеристична једначина се сада може усвојити у облику

$$(s + \sigma)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = 0, \tag{8.115}$$

где, као и раније, ζ и ω_n одређују положај пара доминантних полова система, а σ одређује положај трећег пола.

Поређењем коефицијената имениоца функције спрегнутог преноса, са коефицијентима жељене карактеристичне једначине након сређивања, лако се добијају следеће зависности:

$$K_P = \omega_n(1 + 2\zeta\sigma)\frac{T_o}{K_o}, \tag{8.116}$$

$$K_I = \omega_n^2 \sigma \frac{T_o}{K_o}, \tag{8.117}$$

$$K_D = \frac{T_o(2\zeta\omega_n + \sigma) - 1}{K_0}. \tag{8.118}$$

Размотримо поново сигнал грешке у систему са ПИД регулатором који је одређен изразом

$$E(s) = E^R(s) + E^D(s), \tag{8.119}$$

где је

$$E^R(s) = \frac{s^2(1+sT_0)}{s^3T_0 + s^2(K_0K_D+1) + sK_0K_P + K_0K_I}R(s) \tag{8.120}$$

одступање у односу на референтни сигнал, а

$$E^D(s) = \frac{sK_o}{s^3T_o + s^2(K_oK_D+1) + sK_oK_P + K_oK_I}D(s) \tag{8.121}$$

грешка услед утицаја поремећаја.

Видимо да бројилац израза (8.120) поседује фактор s^2, па ће у стационарном стању, грешка бити једнака нули, не само за константан улазни сигнал већ и у случају нагибног референтног сигнала. Такође, фактор s се појавио и у бројиоцу израза (8.121), тако да ПИД регулатор може ефикасно да елиминише дејство константних поремећаја. Наведена анализа наводи на закључак да применом ПИД регулатора можемо успешно решити проблем независног управљања зглобовима. При томе, имамо чак слободу да произвољно бирамо и карактер одзива система, и његову брзину. Приметимо међутим, да са порастом жељене брзине система, расту и сва појачања регулатора.

На овом месту је потребно рећи да претходна анализа поседује чисто академски карактер. Наиме, анализа је спроведена за чисто линеаран модел објекта управљања, при чему смо сматрали да су све величине континуалне, и да могу узимати произвољне вредности. Међутим, унутар сваког стварног система постоје нелинеарности типа засићења. Другим речима, постоје границе до којих се извесне величине могу повећавати. На пример, напони у управљачким контурама ограничени су напоном напајања, остварива убрзања или брзине су ограничене могућностима мотора, итд. Ако су појачања у систему велика, веома је вероватно да ће нека, или више њих достићи граничну вредност изнад које не могу да се повећавају. Од тог тренутка, систем више не можемо сматрати линеарним, па модел коришћени за одређивање појачања престаје да важи.

Мада модел динамике са аспекта механике садржи све утицаје који се јављају, није могуће све остале ефекте који се у стварности јављају узети у обзир (нпр. суво трење, еластичности и зазоре у редукторима, кашњења у појачавачима, итд). При великим појачањима, сви ови ефекти могу довести до нежељеног понашања робота које се углавном манифестује кроз осцилације робота, при чему је фреквенцију тих осцилација ω_0 могуће експериментално утврдити. Ова учестаност назива се сопственом структурном резонантном учестаношћу. Да би се избегло побуђивање осцилација робота, приликом избора параметара регулатора мора се водити рачуна да важи

$$\omega_n < 0.5\omega_0. \tag{8.122}$$

Другим речима, да би били сигурни да сервосистем неће побудити механички део система тако да га доведе до осцилација са сопственом резонантном учестаношћу бирамо ω_n да буде знатно мање од ω_o. На тај начин се, пропусни опсег сервоструктуре ограничава значајно испод структурне резонантне учестаности. Ограничавањем максималне вредности ω_n се ограничавају и максималне вредности појачања регулатора. То такође значи и да се величина грешке за неке класе улазних сигнала или поремећаја, не може неограничено

смањити.

Размотримо сада начин избора фактора релативног пригушења ζ. Већ смо видели да његова вредност директно одређује карактер одзива у прелазном режиму. У роботици су од интереса само одзиви без прескока, из простог разлога, што постојање прескока може значити судар врха робота са објектима у радном простору. С обзиром да се такође захтева да сервосистем ради што је могуће брже, логичан избор је критично апериодично пригушење $\zeta = 1$, које обезбеђује најбржи одзив без прескока.

Коначно, треба рећи да интегрално дејство, поред своје добре особине да елиминише грешке у стационарном стању, као и дејство константних поремећаја, може у комбинацији са занемареним нелинеарностима, довести до појаве осцилација у систему. Осцилације могу настати, када на пример, услед дејства сувог трења систем стане, а грешка и даље постоји. Интегрално дејство ће се акумулирати све док управљање не постане довољно велико да савлада суво трење. Систем ће се тада померити, али због инерције, нагомиланог дејства интегратора и сувог трења, вероватно је да ће се зауставити тако да грешка буде супротног знака. Цео процес се понавља, и систем осцилује око равнотежне вредности. Овакав режим рада назива се енглеским изразом "*стицк анд слип мотион*".

Други проблем који интегрално дејство може проузроковати је у вези са нелинеарностима типа засићења. Наиме, ако било која величина унутар управљачке петље уђе у засићење, систем ради на граници својих могућности. То значи да су грешке велике, а да њихова елиминација може потрајати дуже. За то време, интегрално дејство се акумулира, па може постати доминатно управљачко дејство. Након што се грешка смањи, и управљачка величина изађе из засићења, систем ће, гоњен нагомиланим интегралним дејством, наставити да се и даље креће на исту страну. Због тога може наступити значајан прескок, све док грешка супротног знака не "испразни"инегрално дејство. Тада настаје супротан процес, и ако поново наступи засићење, осцилације су неминовне. Описана појава назива се интеграторски замах (*енгл.* интеграл винд-уп) и развијене су различите методе које спречавају да до ње дође. Методе за спречавање инеграторског замаха (*анти винд-уп*) су само поменуте, а с обзиром да излазе изван оквира ове књиге, неће бити даље разматране.

Да би анализа децентрализованог управљана зглобовима била комплетна, подсетимо се да је изведена за линеаризовани и распрегнути модел динамике манипулатора. Већ је говорено да је моделу динамике манипулатора потребно придружити и моделе актуатора и трансмисије, и показано је како се модел модификује тако да у себе укључи модел мотора једносмерне струје и редуктора. Такође је константовано да присуство редуктора, нарочито са великим преносним односима, у значајној мери може довести до линеаризације и распрезања модела динамике, тако да динамика самог мотора може да доминира над динамиком механичке структуре манипулатора.

Децентрализовано управљање кретањем зглоба оснаженог мотором једносмерне струје

Сада ће бити подробније размотрено децентрализовано управљање кретањем једног зглоба робота који је актуиран мотором једносмерне струје са

редуктором. Говоримо дакле о проблему регулисања електромоторног погона, што представља посебну научну и техничку дисциплину. Развијене су бројне методе за регулацију електромоторног погона, и овде ће бити размотрен само један, најједноставнији, приступ овом проблему.

Полазна основа је поново модел динамике, и за посматрани зглоб је дат једначином (8.85), коју поново наводимо

$$H_{ii}^{\ddot{q}_i}(t) + \sum_{j \neq i} H_{ij}\ddot{q}_j + n''_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{N_{r_i} K_{me_i}}{R_i} \cdot u(t). \tag{8.123}$$

Приметимо да једначина изражава равнотежу момената који делују у зглобу робота, односно на излазној осовини редуктора. С обзиром да желимо да размотримо управљање мотором (чија динамика доминира моделом) једначину ћемо трансформисати тако да изражава равнотежу момената на осовини мотора. Стога ћемо једначину поделити преносним односом редуктора, и искористићемо везе између позиције, брзине и убрзања на вратилу мотора и излазној осовини редуктора (8.78), чиме се добија

$$\frac{H''_{ii}}{N_{r_i}^2}\ddot{\theta}_i(t) + \frac{1}{N_{r_i}} \sum_{j \neq i} \frac{H''_{ij}}{N_{r_i}}\ddot{\theta}_j + \frac{n''_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{N_{r_i}} = \frac{K_{me_i}}{R_i} \cdot u(t). \tag{8.124}$$

Овај израз можемо написати и у облику

$$H'_{ii}\ddot{\theta}_i(t) + \sum_{j \neq i} H'_{ij}\ddot{\theta}_j + n'_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{K_{me_i}}{R_i} \cdot u(t), \tag{8.125}$$

где су коефицијенти једначине дати

$$H'_{ij} = \begin{cases} \frac{H_{ij}}{N_{r_i}^2} + J_i & i = j \\ \frac{H_{ij}}{N_{r_i}^2} & i \neq j \end{cases}, \tag{8.126}$$

$$n'_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{n_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{N_{r_i}} + \left(B_i + \frac{K_{me_i} K_{em_i}}{R_i} \right) \cdot \dot{\theta}_i \tag{8.127}$$

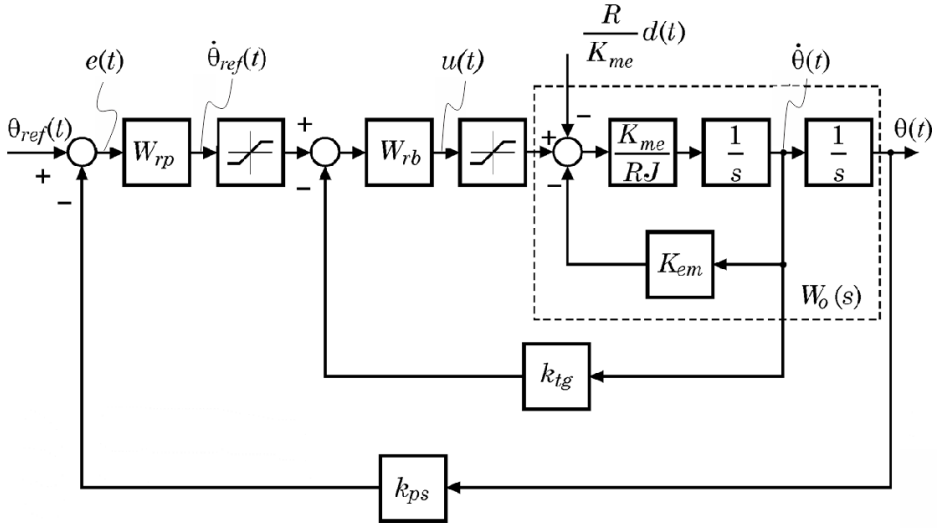
Ако су преносни односи редуктора велики, видимо да је динамика мотора заиста доминантна у односу на динамику манипулатора чији коефицијенти су подељени фактором $N_{r_i}^2$, односно N_{r_i}. Због тога се проблем управљања зглобом робота који је оснажен једносмерним мотором са редуктором, може преставити блок схемом као на сл. 8.17.

У поређењу са претходном управљачком схемом (сл. 8.15) видимо да је објекат управљања истог типа, двоструки интегратор са локалном спрегом по брзини, с тим што су на сл. 8.17, константе објекта управљања одређене првенствено параметрима мотора једносмерне струје. При томе је претпостављено да је параметар електричног трења мотора значајно већи од вискозног

трења у вратилу мотора, односно,

$$\frac{K_{me}K_{em}}{R} >> B, \tag{8.128}$$

а сигнал поремећаја (који представља моменат) је извучен на улаз мотора и трансформисан у еквивалетни напон који се одузима од управљачког напона.



Слика 8.16: Блок схема децентрализованог управљања једним зглобом робота који је оснажен мотором једносмерне струје са редуктором. Управљачка структура је са каскадном регулацијом

Друга значајна разлика у односу на општу схему децентрализованог управљања зглобом се може приметити у структури регулатора. Овде је примењена такозвана каскадна регулација која се примењује када се у објекту управљања може уочити више потенцијалних управљачких величина. По њима се затварају повратне спреге које каскадно обухватају једна другу. Овакав приступ је чест у регулацији електромоторних погона. У схеми приказаној на сл. 8.17, је унутрашња (подређена) повратна спрега затворена по брзини вратила мотора $\dot{\theta}(t)$ тако да регулацију брзине обавља регулатор $W_{rb}(s)$. Спољашња (надређена) повратна спега је затворена је по позицији мотора $\theta(t)$, а регулацију обавља регулатор означен са $W_{rp}(s)$.

Каскадну регулацију можемо концептуално замислити на следећи начин. Регулатор у спољашњој петљи, на основу сигнала грешке формира референтну вредност за унутрашњу управљачку петљу. У нашем случају, то је референтна брзина $\dot{\theta}(t)_{ref}$. Регулатор унутрашње петље, сада на основу новог сигнала грешке (разлике референтне и остварене брзине) формира управљачки напон који се доводи на мотор. У управљачкој структури уочавамо још и два нелинеарна елемента типа засићења. Унутрашњи, ограничава напон на мотору, јер он не може бити већи од напона напајања система. Спољашњи, који ограничава вредност референтне брзине, може бити тако одабран да је брзина

ограничена на вредности које су мање од максималне. У сваком случају, постојање ових блокова засићења не сме бити занемарено, јер кад год нека од величина достигне засићење, модел престаје да буде линеаран, и услови анализе, као и сама анализа, више не важе. Коначно, сигнали повратне спреге по брзини и позицији се не враћају директно на улазе дискриминатора грешаке као што је то до сада био случај, већ су помножени одговарајућим константама које имају за циљ да моделирају понашање сензора при чему k_{ps} представља константу пропорционалности позиционог сензора. За мерење брзине може се искористи тахогенератор (аналогни), или обрађени сигнал са инкременталног енкодера (дигитални). У сваком случају, константа k_{tg} представља фактор пропорционалности сензора брзине.

Код каскадне регулације, се тежи да унутрашње петље имају најбржу и најквалитетнију регулацију, а како се иде ка спољашњим петљама, брзина регулације опада. То се остварује делимично тако што се структура унутрашњих регулатора бира тако да у функцији преноса долази до скраћивања великих временских константи. Због тога је опште прихваћено да брзински регулатор буде ПИ типа, а позициони регулатор П типа:

$$W_{rb}(s) = K_V \frac{1 + sT_V}{s} \tag{8.129}$$

$$W_{rp}(s) = K_P \tag{8.130}$$

где је ПИ регулатор дат у форми са временском константом, уместо инегралног појачања.

Функција преноса објекта управљања, односно мотора једносмерне струје од улазног напона до позиције као излаза, се може добити у облику сличном (8.98),

$$W_o = \frac{k_m}{s(1 + sT_m)}, \tag{8.131}$$

док је функција преноса мотора од напона као улаза до брзине вратила мотора дата са

$$W_o^v(s) = \frac{k_m}{1 + sT_m}, \tag{8.132}$$

где је

$$k_m = \frac{1}{K_{em}}, \tag{8.133}$$

константа појачања мотора, а

$$T_m = \frac{JR}{K_{em}K_{me}}, \tag{8.134}$$

временска константа мотора.

Размотрићемо најпре унутрашњу регулациону контуру. Функција спрегнутог преноса ове контуре добија се у облику

$$W_s^v = \frac{W_{rb}W_o^v}{1 + k_{tg}W_{rb}W_o^v} = \frac{\frac{K_V K_m(1+sT_v)}{s(1+sT_m)}}{1 + k_{tg}\frac{K_V K_m(1+sT_v)}{s(1+sT_m)}}. \tag{8.135}$$

Претходни израз можемо значајно упростити ако се изаберемо

$$T_V = T_m, \tag{8.136}$$

чиме се у изразу скраћује временска константна мотора, тако да се добија

$$W_s^v(s) = \frac{K_V K_m}{s + k_{tg} K_V K_m}. \tag{8.137}$$

Видимо да је добијена функција спрегнутог преноса унутрашње контуре првог реда. Она, заједно са преосталим интегратором чини сада објекат управљања за надређену управљачку контуру. Функција спрегнутог преноса спољашње контуре се сада може добити у облику

$$W_s(s) = \frac{W_{rp}(s) W_s^v(s) \frac{1}{s}}{1 + k_{ps} W_{rp}(s) W_s^v(s) \frac{1}{s}} = \frac{K_P \frac{K_V K_m}{s(s + k_{tg} K_V K_m)}}{1 + k_{ps} K_P \frac{K_V K_m}{s(s + k_{tg} K_V K_m)}}. \tag{8.138}$$

Након елиминисања двоструких разломака добија се израз

$$W_s(s) = \frac{K_P K_V K_m}{s^2 + s \cdot k_{tg} K_V K_m + k_{ps} K_P K_V K_m}, \tag{8.139}$$

који представља систем другог реда без коначних нула. Преостале параметре регулатора сада можемо одредити поређењем имениоца функције спрегнутог преноса са жељеном карактеристичном једначином

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0, \tag{8.140}$$

одакле се директно добија

$$K_V = \frac{2\zeta\omega_n}{k_{tg} K_m}, \tag{8.141}$$

односно,

$$K_P = \frac{\omega_n}{2\zeta} \cdot \frac{k_{tg}}{k_{ps}}. \tag{8.142}$$

Као и раније, сигнал грешке можемо представити збиром две компоненте

$$E(s) = E^R(s) + E^D(s), \tag{8.143}$$

где се грешка у односу на референтни сигнал након неколико трансформација, може добити у облику

$$E^R(s) = \frac{s(s + k_{tg} K_V K_m)}{s^2 + s \cdot k_{tg} K_V K_m + k_{ps} K_P K_V K_m} R(s), \tag{8.144}$$

док је утицај поремећаја на сигнал грешке дат изразом

$$E^D(s) = \frac{K_{ps} K_m \cdot s}{(s^2 + s k_{tg} K_V K_m + k_{ps} K_P K_V K_m)(1 + sT_m)} \cdot \frac{R}{K_{me}} D(s). \tag{8.145}$$

Може се видети да обе компоненте грешке садрже фактор S у бројиоцу, па посматрана каскадна структура регулације без грешке у устаљеном стању прати константе референтне улазе, а такође отклања и дејство константних поремећаја.

Приликом избора пара доминантних полова, и код каскадне регулационе структуре важе критеријуми који су дискутовани раније, а такође важе и све напомене у вези интегратора и блокова засићења.

Изложене методе пројектовања регулатора за децентрализовано управљање једним зглобом манипулатора су дате само као илустрација. Могуће су наравно и разне друге технике управљања, које свакако излазе изван оквира ове књиге. Подсетимо се још једном, да техника децентрализованог управљања зглобом дели модел робота на линеарни распрегнути део са једне, и спрегнути нелинеарни део са друге стране. Регулатори су пројектовани само на основу линеарног распрегнутог модела, уз претпоставку да ће добро пројектовани регулатори елиминисати дејство поремећаја. Када робот поседује редукторе са значајним преносним односом у зглобовима, онда је то најчешће и случај. Међутим, ако су преносни односи редуктора мали, или мотори директно покрећу зглобове, дејство поремећаја може допринети појави значајних грешака, и током прелазног периода, и у стационарном стању, без обзира на квалитет пројектованих регулатора.

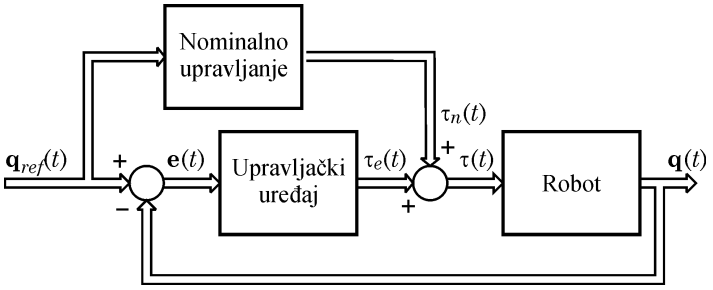
8.3.2 Централизовано управљање кретањем робота

У претходном одељку је размотрено децентрализовано управљање индустријским роботима при чему је целокупна синтеза управљања базирана само на познавању линеарног дела модела динамичког понашања робота уз потпуно занемаривање нелинеарног дела. Његов утицај је третиран као поремећај. То је омогућило коришћење добро развијених методологија синтезе управљања линеарним системима, али је притом важан део модела остао практично неискоришћен. У овом одељку ћемо показати два начина који омогућавају да се познавање нелинеарног дела модела искористи за синтезу управљања.

Управљање путем номиналног управљања

Подсетимо се да је комплетан модел (са аспекта механике) динамичког понашања робота (8.71) познат. Осим тога, задаци у индустријској роботици су познати унапред па је могуће детаљно планирати кретање робота и потпуно је реална претпоставка да су трајекторије свих зглобова познате унапред и можемо их сматрати референтним ($\mathbf{q}_{ref}(t)$). Први начин синтезе управљања где се информација о познавању комплетног модела динамике може адекватно искористити је концепција номиналног управљања[1] која је схематски приказана на сл. 8.17.

[1] У лиетатури се уместо термина „номинално управљање“ може срести термин „преносна компензација“. У радовима М. Вукобратовића се овакав начин синтезе управљања назива „синтезом управљања на два нивоа“ при чему први ниво представља синтезу номиналног управљања а други синтезу управљања које треба да отклони поремећаје.



Слика 8.17: Блок схема концепта управљања роботом путем номиналног управљања

Блок означен као номинално управљање, на основу познатог модела динамике, и задатог референтног кретања робота $\mathbf{q}_{ref}(t)$, израчунава номинално управљање (претпоставимо да је номинално управљање представљено номиналним (референтним) моментима у зглобовима $\boldsymbol{\tau}_n(t)$). У случају потпуног поклапања модела са реалним системом (што никада није могуће) и у случају одсуства спољашњих поремећаја, ово управљање би обезбедило кретање робота $\mathbf{q}(t)$ које је једнако захтеваном. У реалности, постојаће одступање између траженог и оствареног кретања, односно појавиће се сигнал грешке $\mathbf{e}(t)$. На основу сигнала грешке, управљачки уређај формира додатно, грешком индуковану корекцију управљања $\boldsymbol{\tau}_e(t)$ које делује тако да тежи да грешку сведе на нулу.

Приметимо да номинално управљање, ако је добро одређено, треба да чини доминантан део укупног управљачког сигнала $\boldsymbol{\tau}(t)$. Другим речима, номинално управљање треба да доведе систем у околину захтеване трајекторије, а мале грешке (одступања) који се појаве ће бити компензовани регулатором у затвореној повратној спрези.

Скренимо пажњу на чињеницу да се срачунавање номиналних (референтних) момената у зглобовима $\boldsymbol{\tau}_n(t)$ може реализовати само коришћењем укупног (централизованог) модела робота (8.71) чиме се обезбеђује и информација о спрезању међу појединим СС. С обзиром да је већина нелинеарних ефеката, које смо код децентрализованог управљања занемаривали, кроз номинал узета у обзир може се очекивати да ће овакав прилаз показати боље резултате.

Размотримо сада мало детаљније математички аспект управљања са номиналом. Претпоставићемо да је модел робота описан једначином (8.73), која је овде поново дата,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\,, \tag{8.146}$$

у којој је $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ матрица инерције, а вектор $\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ обухвата центрипеталне/центрифугалне и Кориолисове силе, вискозно трење и гравитационе силе. Приметимо да у овај модел могу бити укључени и модели актуатора и трансмисије тј. може представљати модел динамике комплетног роботског система.

Номинално управљање, према сл. 8.17, израчунава се на основу референтног кретања зглобова као

$$\boldsymbol{\tau}_n(t) = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q}_{ref})\ddot{\mathbf{q}}_{ref} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q}_{ref}, \dot{\mathbf{q}}_{ref}), \tag{8.147}$$

где смо са $\hat{\mathbf{H}}$ и $\hat{\mathbf{n}}$ означили да нам је модел само донекле познат по правој вредности параметара. С обзиром на то да је

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \boldsymbol{\tau}_n(t) + \boldsymbol{\tau}_e(t), \tag{8.148}$$

сменом израза (8.146) и (8.147) у (8.148) се добија:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q}_{ref})\ddot{\mathbf{q}}_{ref} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q}_{ref}, \dot{\mathbf{q}}_{ref}) = \boldsymbol{\tau}_e, \tag{8.149}$$

која заједно са једначином динамике регулатора представља модел понашања система.

Претпоставимо зато, да је регулатор у затвореној повратној спрези ПД типа, односно да важи

$$\boldsymbol{\tau}_e(t) = \mathbf{K}_P\mathbf{e}(t) + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{e}}(t), \tag{8.150}$$

где је K_P дијагонална матрица пропорционалних појачања, а K_D такође дијагонална матрица диференцијалних појачања. Дакле, једначина (8.149) заједно са једначином (8.150) представља модел понашања система са номиналним управљањем. Из једначине (8.147) и једначине (8.149) могу се извући закључци о особинама овог модела.

Анализирајмо најпре израз (8.147) којим се дефинише номинално управљање. Видимо да је за израчунавање номинала, потребно познавање не само референте позиције, већ и референтних брзина и убрзања. Ово не представља проблем, поготову ако је референтна трајекторија позната унапред, односно добијена на основу планирања кретања. Ако се трајекторија генерише у реалном времену (*он-лине*), потребно је естимирати брзине и убрзања. Даље, закључујемо да се номинал израчунава само на основу референтне трајекторије и познатог модела. Другим речима, ако је трајекторија унапред позната, могуће је и номинално управљање израчунати унапред, пре него што дође до потребе за стварном реализацијом трајекторије роботом. У литератури овакво управљање, с обзиром да омогућава да се унапред срачунају номинални (референтни) управљачки моменти, назива и "*цомпутед торqуе цонтрол*". Могућност да се номинал израчуна унапред је била нарочито важна у периоду док су могућности рачунара биле недовољне за његово срачунавање у реалном времену, с обзиром на то да је модел изузетно сложен и да је за његово израчунавање било потребно веома дуго време. Код већине савремених робота је модел динамике имплементиран "у чипу"тј. рачунске операције су реализоване хардверски па је проблем он-лине срачунавања динамике (тј. током кретања) на тај начин превазиђен.

Мана оваквог приступа управљању се може сагледати анализом једначине (8.149). Видимо да се у изразу са леве стране појављу разлика између стварне матрица инерције $\mathbf{H}$ и модела $\hat{\mathbf{H}}$, као и између стварног вектора динамике $\mathbf{n}$ и модела $\hat{\mathbf{n}}$. Када би модел био потпун и када би апсолутно одговарао стварном систему, матрица инерције би могла да се извуче као заједнички фактор испред разлике референтног и оствареног убрзања, а компоненте вектора

динамике би се у доброј мери поништиле. Како то није случај и како постоји разлика потребно ју је компензовати.

Напоменимо да су динамички ефекти значајни уколико су чланови који зависе од убрзања и брзина довољно велики. Другим речима, динамика је незаобилазна у синтези управљања уколико се током кретања јављају значајна убрзања или брзине. Уколико је кретање робота релативно споро тако да су моменти услед гравитационих сила доминантни, коришћени модел се може и намерно поједноставити, па за роботе који се крећу умереним брзинама и убрзањима, довољно је формирати номинале само на бази гравитационих оптерећења. На тај начин, смањује се комплексност модела, а самим тим и време потребно за израчунавање номинала.

Линеаризација путем повратне спреге

Већ смо истакли да је основни недостатак номиналног управљања тај што се номинално управљање израчунава на основу референтне, а не актуелне трајекторије. Начин да се овај проблем превазиђе нам нуди теорија управљања нелинеарним системима, методом линеаризације путем повратне спреге (*енгл.* феедбацк линеаризатион).

Размотримо задатак управљања кретањем зглобова робота. Модел динамике је и даље дат једначином (8.146)

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}\left(\mathbf{q}\right)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}\left(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right), \tag{8.151}$$

у којој су све величине већ познате. Претпоставимо сада да се погонски моменат мотора $\boldsymbol{\tau}$ формира по закону

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}), \tag{8.152}$$

где су $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q})$ и $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ за сада непознате функције тренутног стања робота, а $\mathbf{u}$ је нова управљачка величина.

Основна идеја код увођења управљачког закона облика (8.152), јесте да се систем распрегне и линеаризује, тако да буде линеаран и распрегнут по новом управљању $\mathbf{u}$. Сменом израза (8.152) у (8.151) се добија

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}). \tag{8.153}$$

Очигледно, избором

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{n}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}), \tag{8.154}$$

ће доћи до скраћивања другог сабирка са обе стране једначине (8.153), па она постаје

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \alpha(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{u}. \tag{8.155}$$

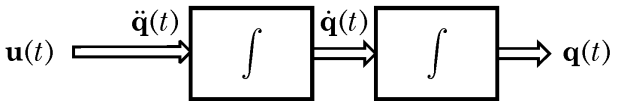
Ако се сада усвоји

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) = \mathbf{H}(\mathbf{q}), \tag{8.156}$$

онда, с обзиром на то да је матрица инерције увек регуларна, након множења целе једначине са $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})$ модел система постаје

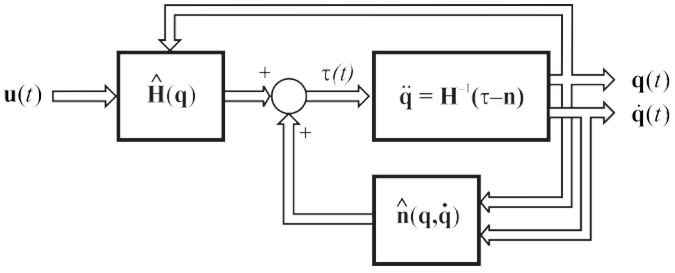
$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}(t). \tag{8.157}$$

Добијени модел представља модел линеарног система по новом управљачком сигналу $\mathbf{u}$, који је приказан на сл. 8.18. Модел је другог реда, и састоји се од две групе каскадно везаних интегратора. Видимо да смо увођењем управљања облика (8.152), успели да модел нелинеарног спрегнутг система сведемо на линеарни распрегнути систем по новом сигналу управљања.



Слика 8.18: Еквивалентан, линеаризован и распрегнут систем

Приметимо да у изразу за управљање учествују коефицијенти и функције које зависе од тренутног стања робота. Другим речима, да би се формирало управљање облика (8.152), мора се пратити и мерити стање робота, а затим та информација искористити за формирање управљања. То заправо представља врсту повратне спреге, која омогућава линеаризацију и распрезање модела динамике. Концептуално, линеаризација применом повратне спреге приказана је на сл. 8.19. На сл. 8.19 уочавамо да се повратна спрега затвара кроз нелинеарне блокове, означене се $\hat{\mathbf{H}}$ и $\hat{\mathbf{n}}$, а за последицу има линеаризацију целог система. Приметимо да елементи у повратној спрези имају ознаку "$\hat{}$", јер представљају наше ограничено знање правих вредности параметара и структуре модела динамике.



Слика 8.19: Блок схема линеаризације модела динамике робота увођењем повратне спреге

Размотримо сада поново закон управљања (8.152). Према ознакама са сл. 8.19, закон постаје

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \tag{8.158}$$

Видимо да је закон управљања (8.158) врло сличан закону номиналног управљања (8.147), ако нови управљачли сигнал $\mathbf{u}$ изједначимо са референтним убрзањем. Основна разлика је у томе што се коефицијенти матрица у изразу (8.158) израчунавају у односу на тренутно стање робота, док се номинално управљање рачуна у односу на референтну трајекторију. То је битна разлика: док се номинално управљање може израчунати унапред, *офф-лине*, закон управљања (8.158) мора се рачунати *он-лине*, унутар петље повратне спреге.

С обзиром да је, након увођења повратне спреге облика (8.158) модел система дат једначином (8.157), линеаран и распрегнут, нови управљачки

сигнал можемо формирати на бази познатих управљачких стратегија за линеарне системе, на пример помоћу ПД регулатора. С обзиром да сигнал управљања $\mathbf{u}$ у (8.158) треба да садржи информацију о убрзању дуж трајекторије, формирајмо линеарни управљачки закон на следећи начин

$$\mathbf{u}(t) = \ddot{\mathbf{q}}_{ref}(t) + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{e}}(t) + \mathbf{K}_P\mathbf{e}(t), \tag{8.159}$$

где су K_D и K_P дијагоналне матрице диференцијалног и пропорционалног појачања, а са $e(t)$ смо означили грешку праћења трајекторије

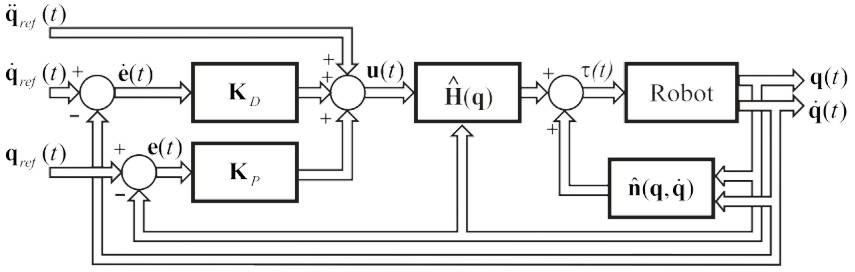
$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}_{ref}(t) - \mathbf{q}(t), \tag{8.160}$$

док је $\dot{\mathbf{e}}(t)$ извод грешке по времену. Сменом израза (8.159) у модел линеарног система (8.157) добијамо диференцијалну једначину понашања грешке система

$$\ddot{\mathbf{e}}(t) + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{e}}(t) + \mathbf{K}_P\mathbf{e}(t) = 0, \tag{8.161}$$

па избором коефицијената појачања у матрицама K_D и K_P бирамо карактер и брзину прелазних процеса.

Закони управљања (8.159) и (8.158) могу се представити као на сл. 8.20. где може да се уочи унутрашња повратна спрега, која полазни нелинеарни спрегнути систем трансформише у распрегнути линеарни систем, и око ње затворену спољашњу повратну спрегу, која има за циљ генерисање одговарајућег управљања за овако линеаризовани систем.



Слика 8.20: Блок схема концепта управљања коришћењем инверзног динамичког модела

Приметимо још да је диференцијална једначина која описује понашање грешке (8.161) добијена под претпоставком потпуног поклапања модела коришћеног за генерисање управљања (8.158) и модела система (8.151). Стварни модел система никада није потпуно познат па се може показати да је у том случају грешка праћења трајекторије одређена изразом

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_P\mathbf{e} = \hat{\mathbf{H}}^{-1}(\Delta\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \Delta\mathbf{n}), \tag{8.162}$$

где су са $\Delta\mathbf{H}$ и $\Delta\mathbf{n}$ означене разлике између стварне динамике система и модела.

Ако познавање модела није довољно добро, тако да ПД регулатори не задовољавају у погледу захтеваних перформанси система, потребно је применити боље регулаторе, или се ослонити на неку од техника робусног управљања, код којих је основни циљ да се обезбеди квалитетно управљање, упркос непознавању тачног модела, или значајним варијацијама параметара

модела током рада. Методе робусног управљања излазе ван оквира ове књиге, а заинтересовани читаоци упућују се на литературу за даље самостално проучавање.

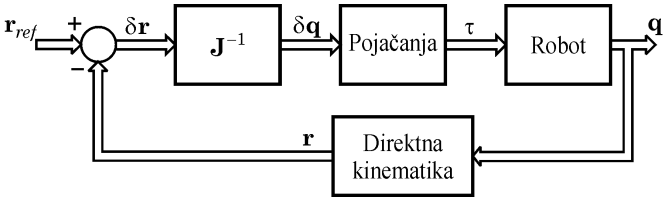
8.4 УПРАВЉАЊЕ У СПОЉАШЊИМ КООРДИНАТАМА

Све управљачке стратегије, које смо до сада разматрали, претпостављале су да је референтна трајекторија задата у унутрашњим координатама тј. координатама зглобова. Шта више, многе управљачке стратегије, поред референтних позиција, захтевају и референтне брзине и убрзања. Са друге стране, задатак се обично задаје у спољашњим координатама, јер је од интереса кретање његовог врха, па се по дефинисању задатка а пре синтезе управљања, решава инверзна кинематика, да би се одредиле референтне вредности позиција, брзина и убрзања зглобова робота.

Као што је већ речено, повратна спрега се може затворити и директно по спољашњим координатама, односно позицији и оријентацији врха робота. Овакав приступ је концептуално приказан на сл. 8.21. Међутим, код већине савремених индустријских робота положај врха се не мери директно, већ посредно, преко измерених позиција зглобова, а затим се применом метода директне кинематике срачунава положај врха робота. То би значило да се у практичној реализацији управљачке структуре, на излазу из система управљања појављују позиције зглобова а да се у повратној грани израчунава функција директне кинематике.

Као што је на сл. 8.21. приказано, сигнал грешке се формира на основу разлике жељеног и остареног положаја врха робота, дакле у спољашњим координатама. Сада је задатак управљачког уређаја да овај сигнал грешке трансформише у управљачке моменте, који ће деловати тако да остваре кретање које је што ближе референтном. Другим речима, одступања из домена спољашњих координата, треба трансформисати у моменте у домену унутрашњих координата.

Приказаћемо два начина на које се ово може извести. Према првом приступу, најпре се одступање из домена спољашњих преведе у домен унутрашњих координата, а затим се тако добијене величине трансформишу у моменте. Према другом приступу, најпре се на основу одступања у спољашњим координатама израчунају силе које су потребне да би се одступања поништила, а затим се ове силе трансформишу у моменте у домену унутрашњих координата.



Слика 8.21: Блок схема концепта управљања по спољашњим координатама применом инверзије Јакобијана

Први приступ је илустрован схемом на сл. 8.21. Сигнал грешке (одступања) у спољашњим координатама је означен са $\delta\mathbf{r}$. Под претпоставком да је

управљање квалитетно, грешка не би требала да буде велика па је могуће искористити везу из диференцијалне кинематике

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\delta\mathbf{q}. \tag{8.163}$$

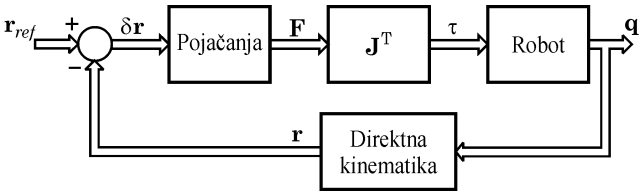
Под претпоставком да робот није редундантан, и да јакобијан није сингуларан можемо написати

$$\delta\mathbf{q} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\delta\mathbf{r}, \tag{8.164}$$

где смо инфинитезималне прираштаје позиција у унутрашњим и спољашњим координатама заменили коначним, али малим величинама.

Овако добијене грешке у унутрашњим координатама множимо одговарајућим појачањима да би формирали управљачке моменте, који ће деловати у зглобовима робота, и тако елиминисати грешке позиционирања врха робота.

Одмах се уочава да је регуларност Јакобијана неопходан услов да би управљачка схема са инверзијом Јакобијана могла бити примењена. Подсетимо се да Јакобијан није регуларна матрица у сингуларним тачкама, а да проблеми могу настати и у околини сингуларитета, где ће се генерисати исувише велике грешке у унутрашњим координатама, што захтева деловање момената у зглобовима који су исувише велики и нису оствариви. То све може довести до проблема са стабилношћу управљачког система. Други потенцијални проблем, је потреба за сталним израчунавањем Јакобијана унутар управљачке петље, на основу остварене позиције. Треба уочити да одређивање Јакобијана може бити рачунски захтеван поступак, поготово његова инверзија, што може представљати озбиљан задатак за управљачки хардвер.



Слика 8.22: Блок схема концепта управљања по спољашњим координатама применом транспозиције Јакобијана

Други приступ је схематски приказан на сл. 8.22. Сигнал грешке у спољашњим координатама се множи одговарајућим појачањима, да би се одредиле силе које треба да делују на врх робота, тако да се грешке смање. То је могуће урадити на следећи начин. Применом познате релације

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^{T}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{F}, \tag{8.165}$$

силе из простора спољашњих координата преводе се у моменте у зглобовима робота, и доводе као управљачки сигнал на улаз манипулатора. I овде је потребно израчунавати Јакобијан у реалном времену, али га није потребно инвертовати већ само транспоновати што је неупоредиво једноставније. Такође, са оваквим приступом донекле су елиминисани проблеми сингуларности.

ЛИТЕРАТУРА

An C., Atkenson C, Hollerbach J., *Model-Based Control of a Robot Manipulator*, The MIT Press, 1998.

Arimoto S., *Control theory of Non-Linear Mechanical Systems: A Passivity-Based and Circuit-Theoretic Approach*, Oxford University Press, 1996.

Asada H., Slotine J.J., *Robot Analysis and Control*, John Wiley and sons, 1985.

Craig J., *Introduction to Robotics: Mechanics & Control,* Addison–Wesley, 1986.

Dorf. R , Bishop R., *Modern Control Systems*, Addison-Wesley, 1995.

Milosavljević Č., *Osnovi Automatike, I deo, Linearni vremenski kontinulani sistemi upravljanja*, Elektronski fakultet, Niš, 2001.

Milosavljević Č., *Osnovi Automatike, III deo, Komponente sistema automatskog upravljanja*, Elektronski fakultet, Niš, 2001.

Milosavljević Č., *Teorija automaskog upravljanja-1*, Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Istočnom Sarajevu, 2008.

Milosavljević Č., *Teorija automaskog upravljanja-2*, Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Istočnom Sarajevu, 2008.

Sciavicco L., Siciliano B., *Modeling and Control of Robot Manipulators*, McGraw-Hill, 1996.

Siciliano B., Khatib O. (Eds.), *Springer handbook of robotics*, Springer-Verlag, 2008.

Stojić M., *Kontinulani sistemi automatskog upravljanja*, Nauka, Beograd, 1993.

Vučković V., *Električni pogoni*, Elektrotehnički fakultet, Nauka, Beograd, 1993.

Vukobratović M., (u saradnji sa Đurović M., Hristić D., Karan B., Kirćanski M., Kirćanski N., Stokić D., Vujić D., Živković V.), *Uvod u robotiku*, Institut Mihajlo Pupin, Beograd, 1988.

Vukobratović M., *Primenjena dinamika manipulacionih robota*, Tehnička knjiga, Beograd, 1986

Vukobratović M., *Primenjena dinamika manipulacionih robota*, Tehnička knjiga, Beograd, II dopunjeno i izmenjeno izdanje, Beograd, 1990

Vukobratović M., Stokić D., *Sinteza i algoritmi upravljanja manipulacionim robotima*, Institut Mihajlo Pupin, Beograd, 1981

Vukobratović M.,Potkonjak V, *Dinamika manipulacionih robota i aktivnih prostornih mehanizama*, Institut Mihajlo Pupin, Beograd, 1981

Xie Ming, *Fundamentals of robotics: linking perception to action*, World Scientific Publishing, 2003.

9. ПРОГРАМИРАЊЕ ИНДУСТРИЈСКИХ РОБОТА

Посебно важан задатак у оквиру примене робота у пракси представља његово програмирање. Програмирањем се прописује жељено понашање робота у свим ситуацијама током реализације задатка тако да задатак буде што успешније реализован. Међутим, пошто робот делује у "стварном свету" током реализације задатка могу наступити и непредвиђени или неочекивани догађаји. Програмом треба да се специфицира понашање робота и у таквим ситуацијама.

У овом поглављу[1] ће бити размотрена проблематика програмирања робота са аспекта главних задатака који програмирањем треба да буду решени. Поред тога ће бити речи и о очекиваним правцима развоја ове области.

9.1 НАЧИНИ ПРОГРАМИРАЊА И ВРСТЕ ПРОГРАМСКИХ ЈЕЗИКА

Програмирањем се морају специфицирати све акције које робот током реализације задатка треба да оствари као и да се одреди његово понашање у непредвиђеним ситуацијама. Једна од основних подела начина програмирања робота је према томе да ли је за програмирање потребан програмски језик или није. Најједноставнији начин програмирања робота је "обучавање показивањем" тј. његовим провођењем путањом коју треба да оствари, њеним памћењем и накнадном репродукцијом.

Најчешћа примена ове врсте програмирања (мада полако излази из употребе) је код робота који треба да остваре путање које није лако математички описати у свим детаљима, као што је нпр. бојење прскањем. Уместо на правом роботу, "показивање" трајекторија које треба остварити се може реализовати помоћним уређајем који геометријски одговара роботу, али у зглобовима нема моторе већ сензоре за детекцију углова. Провођење жељеном трајекторијом оваквог механизма је значајно лакше него када би се користио прави робот.

Други, суштински другачији, начин програмирања робота је коришћењем језика за програмирање. С обзиром да је број задатака који се програмирају на овај начин знатно већи од броја задатака код којих је робот могуће програмирати обучавањем, надаље ћемо разматрати само проблематику програмирања употребом програмског језика.

Постоје два основна начина како се програмски језик може формирати. Први је да се искористи потенцијал који пружају неки од већ постојећих виших програмских језика за програмирање рачунара као што су ФОРТРАН, ПАСЦАЛ или С, с тим што је потребно да се додају неопходне рутине за погон робота.

Други начин је да се направи посебан језик за програмирање робота који боље одговара проблематици манипулације објектима. Многи произвођачи робота су развили програмске језике (или комплетне софверске апликације) за

[1] Поглавље је у великој мери базирано на раду Гини М., **Тхе футуре оф робот программинг**, Роботица, 1987, Вол. 5, пп. 235-246

програмирање "својих" робота тако да данас постоји велики број "фабричких" програмских језика који захтевају одређени хардвер и могу да се примене само за програмирање робота које дотични произвођач производи. Стога корисници робота увек треба да имају на уму да, у пракси, промена произвођача од којег се робот набавља значи и промену језика за програмирање. То значи да поред обуке за нови програмски језик програме који су били дотле коришћени треба поново реализовати са програмским језиком који користи нови робот.

Постоји више начина на које програм може да се формира. Један начин је да програмер у програму специфицира све акције које робот треба да оствари, чак и оне које не морају неизоставно да буду реализоване сваки пут, већ само у случају када се за то стекну одговарајући услови (ово се најчешће односи на ситуације када наступи нека грешка у реализацији задатка, а потребно је да се утицај грешке елиминише и реализација задатка настави). Код робота старијих генерација та спецификација је била тако детаљна да је у програмском коду програмер требало да специфицира кретање сваког појединачног зглоба као и редослед њиховог активирања. Затим су се појавили програмски језици код којих се специфицира путања роботске хватаљке током реализације задатка, а кретање зглобова аутоматски генерише програмски систем чиме је програмирање, са аспекта програмера, значајно олакшано.

Међутим, треба рећи да је програмирање и даље озбиљан и сложен задатак чија реализација дуго траје. И даље, програмер треба да дефинише све покрете веома прецизно, да води рачуна о одзиву сензора и акцијама које на бази ових информација треба реализовати. Међутим, иако одређене сличности постоје, треба напоменути да се програмирање робота не може поистоветити са програмирањем рачунара. Основна разлика је у томе што је током извршавања програма робот у контакту са реалним, а не виртуелним окружењем. Тако, на пример, одређена секвенца програма (тј. одређена акција робота) може много пута да буде реализована беспрекорно, да би у једном тренутку њена реализација била онемогућена малом разликом у димензијама објекта којим робот рукује.

Према томе, с обзиром да акције робота нису у потпуности (идеално) поновљиве, а да није могуће обезбедити ни потпуно исто почетно стање околине робота (сцене у којој робот ради) на почетку сваког поновног извршавања задатка, могу се јавити грешке при реализацији задатка. Стога је потребно да се пре индустријске имплементације програма што више оваквих ситуација открије и дефинише одговарајући начин реаговања робота, што се постиже детаљним тестирањем програма. Према томе, програмирање робота и тестирање развијеног програма представља дуготрајан и заморан процес. Тестирање је отежано чињеницом да је при сваком понављању тестиране секвенце неопходно сцену (стварну а не виртуелну) довести у почетно стање.

Имајући на уму шароликост постојећих језика за програмирање робота, њихову поделу је најпогодније урадити, не на бази синтаксе, већ на основу нивоа апстракције на којем се пише кôд програма. Стога роботске језике можемо да поделимо на четири основне групе:

- језици којима се програмира покретање сваког зглоба појединачно како би се остварило жељено кретање хватаљке (програмира се на ***нивоу зглобова***). Ово су језици најнижег нивоа. Једино је код робота правоугле или Декартове конфигурације ово природан начин програмирања.

Представници ове врсте језика су Оливетти-јева СИГЛА и ХЕЛП компаније ДЕА.

- језицима где се програмирање врши на ***нивоу манипулације*** се описује положај и оријентација хватаљке робота током реализације задатка, док кретања појединачних зглобова који овакво кретање хватаљке треба да обезбеде систем одређује аутоматски. Најпознатији језик ове класе је ВАЛ фирме Униматион који се користи за програмирање ПУМА робота. Највећи број савремених програмских језика за роботе припада управо овој групи.

- код језика којима се програмирање врши на ***нивоу објеката*** се у програм директно уноси информација о радној сцени на којој робот делује тј. околини робота. Задатак се описује низом узастопних положаја објеката (уместо положаја роботске хватаљке), а програм треба да сам генерише све што је неопходно да се овакво кретање оствари. Основна предност ових језика над језицима нивоа манипулације је у томе што је при реаранжирању сцене за одређени задатак (промена положаја објеката) потребно само променити координате објеката док сам програм којим се реализује задатак није потребно поново писати. Осим тога, ови језици, у начелу, дозвољавају да један програм буде применљив на различите роботе без измена основног дела програма. Представници ове групе језика су АЛ (и језици који су се јавили касније LM и СРЛ) где су објекти приказани са једним или више координатних система, као и РАПТ, АУТОПАСС и ЛАМА где су коришћени много сложенији геометријски модели.

- групи језика којима се програмирање врши на ***нивоа задатка*** припадају системи који би требало да разумеју и остваре задатак описан у најопштијој форми (нпр. монтирај лежај у кућиште мотора), тако што би сами планирали потребне захвате, њихов редослед, неопходне путање хватаљке робота у оквиру сцене, и генерисали одговарајуће акције ради реализације задатка. Не постоји комплетан систем који обезбеђује програмирање робота на овом нивоу.

Друга подела програмских језика је према томе да ли је неопходно да приликом формирања програмског кода програмеру буде расположив "прави" робот или не. Уколико се у процесу програмирања користи "прави" робот (нпр. да би се хватаљка робота довела у жељену позицију у оквиру "праве" сцене и да се одговарајући углови у зглобовима механизма запамте), такав начин се назива *он-лине* програмирањем. То практично значи да робот при *он-лине* програмирању треба да буде изузет из процеса производње током развоја програма и стављен на располагање програмеру да га користи током програмирања. У случајевима када су роботи делови сложених индустријских аутоматизованих система ово веома тешко може, или уопште не може, да се обезбеди, па тада програмирање мора да се реализује без коришћења робота у току развоја програма. Прави робот и праве радне предмете је једино могуће и неопходно користити за завршна подешавања. Овакав начин програмирања, без коришћења робота у току развоја програма, се назива *офф-лине* програмирањем. Пошто се при формирању програмског кода, уместо стварног и "физички присутног" робота, користи његов витуелни модел намеће се закључак да би било корисно да се и реална сцена замени виртуелном. То има за последицу да је при *офф-лине* програмирању могуће проверити

симулацијом процес роботизације одређеног задатка пре него што су сви елементи који у њему учествују физички доступни.

Према томе, квалитетан систем за *офф-лине* програмирање треба да омогући да је доступна база модела роботских манипулатора и разних алата које робот користи као и ЦАД база података о радним предметима, мора да постоји могућност провере исправности написаног програма симулацијом његовог извршавања и да се на основу резултата, процес побољша оптимизацијом времена трајања циклуса, подешавањем распореда објеката који учествују у процесу или изменом редоследа извршавања операција. Важно је уочити да при *офф-лине* програмирању чак није неопходно да радни предмет стварно постоји већ је програмирање могуће реализовати користећи њихове ЦАД моделе. То је веома погодно јер је побољшања конструкције радног предмета могуће предложити још у фази пројектовања, уколико се у току симулације укаже потреба за изменама.

Наравно, *офф-лине* програмирање има и одређене мане. Програми развијени на овај начин су у већој мери непоуздани и подложни појави грешака. Највећи број проблема се јавља због немогућности поуздане симулације сензора. Осим тога, немогуће је елиминисати одређено одступање модела околине робота од његове стварне околине. Веома је важно уочити та одступања како би било могуће предузети одговарајуће корективне акције без учешћа човека.

9.2 ОСНОВНИ ПРОБЛЕМИ ПРОГРАМИРАЊА РОБОТА

Три су основна извора проблема са којима се програмери робота данас сусрећу и на које треба посебно указати:

- Сасвим је извесно да информација о околини у којој робот ради мора бити укључена у програм, директно или индиректно. У многим програмским језицима је информација о околини дата посредно кроз вредности различитих параметара. Тако је нпр. информација о величини предмета који робот преноси садржана у вредности параметра којим се дефинише отвор хватаљке, док експлицитне информације о самом објекту нема.

- Други проблем представља описивање просторних покрета робота (нпр. при бојењу прскањем) и програмирање операција које су базиране на сензорских информацијама. Одговарајуће вредности прага осетљивости сензора, крутости, ... је најчешће једино могуће поуздано одредити пробањем. Осим тога, један део програмских језика чак и не обезбеђује инструкције за рад са сензорима.

- Трећи проблем представља опоравак од грешака. С обзиром да систем има само парцијалну информацију о околини, веома је тешко реализовати систем који би био у стању да реагује на адекватан начин и самостално се опорави у случају да дође до поремећаја у реализацији задатка, макар и код грешака које се најчешће јављају.

У тексту који следи ћемо се детаљније позабавити овим проблемима.

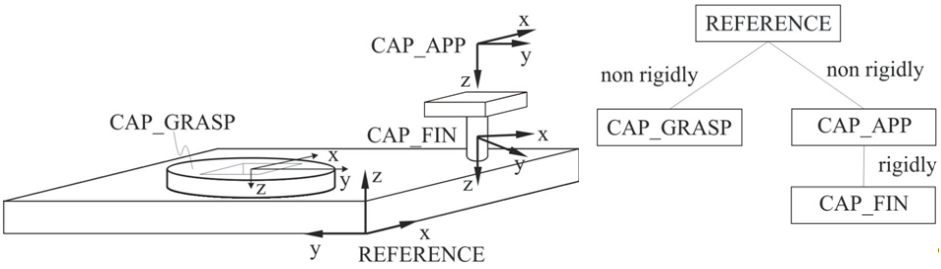
9.2.1 Модели околине

Језици код којих се информације о објектима који сачињавају околину робота не појављују називају се експлицитним језицима. Језици који садрже информације о околини се називају имплицитним језицима. Овде ћемо поменути и упоредити само два начина моделирања околине: помоћу координатних система (језик АЛ) и дефинисањем површина објеката и њихових међусобних положаја (језик РАПТ).

а) Моделирање околине у језику АЛ

АЛ је комплетан програмски језик који омогућава управљање радом више робота различите конфигурације који истовремено раде на истом задатку, и комуникацију са различитим периферним уређајима као што је нпр. систем за машинску визију.

Сцена (распоред и положај објеката на њој) се описују низом објектима придружених координатних система. На сл. 9.1а је дат пример два објекта који су дефинисани координатним системима ЦАП_ГРАСП, ЦАП_АПП и ЦАП_ФИН. Међусобни релативни положај координатних система је дефинисан на сл. 9.1б док је њихов апсолутни положај дат у односу на референтни координатни систем који је означен са РЕФЕРЕНЦЕ. Релативни положај неких координатних система је непроменљив (нпр. ако више њих припада истом крутом телу) док релативни положај других може бити променљив.



(а) *(б)*

Слика 9.1: Изглед радног места са објектима којима су придружени координатни системи

Одговарајуће инструкције декларативног АЛ програма су дате на сл. 9.4. док се у процедуралном делу програма уместо кретања робота описује низ кретања коодинатних система придружених објектима.

Иако је модел околине дат у веома ограниченом облику, и овакав опис има одређене предности. Пошто се у програму експлицитно дефинишу положаји објеката, а не позиције хватаљке робота, овакав програм се може користити за реализацију истог задатка различитим роботима. Осим тога се, нпр. исти монтажни програм може користити и у случају да се модел околине промени у смислу да објекти који учествују у монтажи промене своје положаје у оквиру радне сцене. У том случају је потребно само прерачунати нове положаје објеката, док остатак програма остаје неизмењен.

```
FRAME REFERENCE;
REFERENCE: -FRAME (NILROTN, VECTOR, (5.38, 34.1,.216)*INCHES);
FRAME CAP_ GRASP;
AFFIX CAP_ GRASP TO REFERENCE AT TRANS
(ROT (YHAT, 180.*DEGREES)* ROT (ZHAT, -179.3*DEGREES),
VECTOR(2.67,9.22,1.08)*INCHES) NONRIGIDLY;
FRAME CAP_ APP;
AFFIX CAP_ GRASP TO REFERENCE AT TRANS
(ROT (YHAT, 180.*DEGREES)* ROT (ZHAT, -180*DEGREES),
VECTOR(10.2,3.71,3.11)*INCHES) NONRIGIDLY;
FRAME CAP_ FIN;
AFFIX CAP_ FIN TO CAP_ APP AT TRANS
(ROT (ZHAT, 45.*DEGREES),3* ZHAT) RIGIDLY;
SCALAR WIDTH;
WIDTH : -2.4;
```

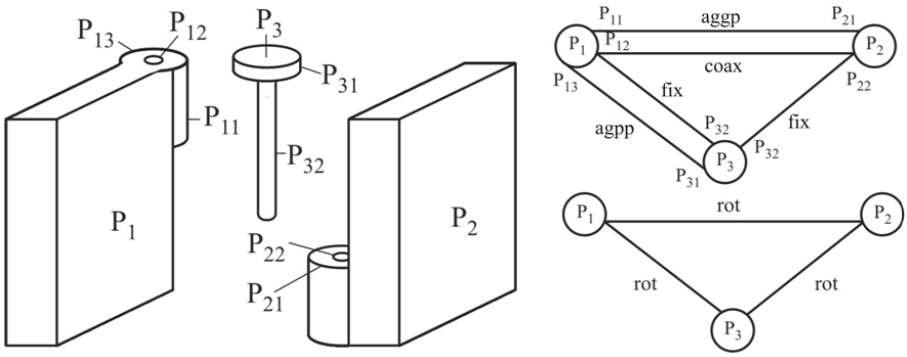
Слика 9.2: Опис модела околине у АЛ програму

б) Моделирање околине у језику РАПТ

Други пример моделирања околине се може наћи у језику РАПТ који је базиран на синтакси језика АПТ (језик за програмирање нумерички управљаних машина). У језику РАПТ се објекти описују тако што се специфицирају све странице (површине) објеката које директно учествују у реализацији задатка (на сл. 9.3 ове странице су обележене са Пиј при чему индекс "и" означава предмет, а "j" одговарајућу површину) и њихови коначни релативни положаји. Релативни положаји површина на различитим објектима које долазе у контакт могу бити дефинисани као: управан на (*перпендицулар* то) и паралелан са (*параллел* то). Елементарни геометријски ентитети које систем препознаје су: раван (*плане*), цилиндар (*цулиндер*) и сфера (*спхере*).

Пошто су сви појединачни објекти описани на одговарајући начин, програмер треба да дефинише њихов међусобни положај када је објект потпуно монтиран. За то му на располагању стоје следеће релације: уклапа се у (*фитс*), коаксијалан (*цоаxиал*), копланаран (*цо-планар*), раван насупрот равни (*агаинст плане то плане*, означено као агпп на сл. 9.3.б), раван насупрот цилиндру (*агаинст плане то цулиндер*), раван насупрот сфери (*агаинст плане то спхере*), сфера насупрот сфере (*агаинст спхере то спхере*). *Линеар* значи да се једно тело може транслаторно померати у односу на друго у једном правцу, *рот* означава да се једно тело може ротирати око једне осе у односу на друго, *фих* означава да два тела имају непроменљив релативан положај, *линлин* значи да је могућност релативног кретања два тела ограничена на раван без ротације. Релативни односи појединих саставних делова укупног производа на примеру шарке су приказани на сл. 9.3а, а релативни односи геометријских ентитета и могућност релативног покретања саставних делова на сл. 9.3б.

Треба напоменути да РАПТ омогућава формирање подсклопова – трајних или привремених који у једном тренутку постоје док се касније може



(а) *(б)*

Слика 9.3: Објекат са својим саставним деловима и усвојени геометријски ентитети

декларисати да не постоје. Када су два тела повезана у подсклоп (можемо их повезати и ради реализације заједничке акције) они реализују исти покрет. Примера ради, уколико је неки објекат повезан са хватаљком робота, он ће се кретати заједно са њом пратећи њену промену положаја и оријентације и задржавајући увек задати релативни положај. Осим тога, да би се задатак реализовао није довољно само да се дефинише међусобни положај саставних делова када је објект потпуно монтиран, већ програмер треба да пропише редослед извођења појединих акција којима се стиже до коначно монтираног производа (сл. 9.4).

against/head of pin, top of flange 1
fits/shaft of pin, hole of flange 1
fits/shaft of pin, hole of flange 2
against/bottom of flange 1, top of flange 2

Слика 9.4: Релације између делова монтираног објекта

I код овог језика постоји неколико отворених и нерешених проблема. Пре свега треба напоменути да модели тела нису ограничени и није могуће проверити да ли ће током извршавања задатка доћи до судара. Затим, РАПТ не подржава рад са сензорима. Претпоставља се да су сва кретања остварена на нивоу номинала и све одлуке се на томе базирају. I на крају, РАПТ програм може бити само низ безусловних команди и нису дозвољена условна гранања.

ц) Будући трендови у моделирању околине

С обзиром да су ЦАД системи нашли своје место у савременом свету и да ће њихова улога све више расти, логично се намеће закључак да би било сврсисходно да се ови системи у што већој мери користе при програмирању робота. Међутим, у овом тренутку постоје извесни проблеми који стоје на том путу.

Први проблем који треба разрешити је да се обезбеди симулација понашања објеката у оквиру роботског система, а не да се објекти само анимирају. Наравно, ово се односи на све елементе сцене, како оне који су активни (тј. који су оснажени моторима и на чије понашање можемо активно утицати, као што су на пример роботи), тако и на оне који нису. Примера ради, ако је објекат постављен на стрму раван, у случају исувише великог нагиба треба да се јави проклизавање, на исти начин на који би се то догодило у стварности. Проблем је што ЦАД модели "не знају" ништа о физици. Овакви системи који се користе у роботици могу да симулирају роботе, али не могу да симулирају понашање остатка система.

Осим тога, потребно је да роботи боље "разумеју" своју околину. Скоро сваки задатак захтева рачунарску интерпретацију објеката којима се манипулише. С обзиром да робот делује у сложеној околини у начелу су модели објеката непотпуни и недовољно тачни јер степен сложености модела зависи од његове намене. Потпуни опис објеката (геометрија + физичке и механичке особине) је сигурно непотребан, јер пружа више информација него што нам је потребно. Да би објекат пренели роботом једино је потребно да се специфицирају површине где треба извршити хватање (то су најчешће наспрамне и паралелне странице) и циљна позиција. Међутим, у случају да се догоди грешка приликом реализације задатка (нпр. приликом преношења објекат је испао из хватаљке), овај модел постаје недовољан да би систем самостално исправио грешку. Тада постају важне и остале информације, као на пример: о положају тежишта објекта, алтернативним позицијама за хватање, квалитету површина (коефицијент трења, особине рефлексије уколико се користи визија), а уколико постоји више могућих начина хватања објекта потребно је да се донесе одлука о томе на који начин објекат треба да буде ухваћен и на који начин да се такав хват оствари уколико није могуће објекат директно ухватити на жељени начин (нпр. уколико се предмет после испуштања из хватаљке откотрљао на место на којем није директно дохватљив).

9.2.2 Описивање задатака

Сваки роботски програм представља опис (списак) акција које робот треба да изврши да би остварио постављени задатак. Први начин на који то може да буде урађено је да се све акције специфицирају веома детаљно, са свим појединостима шта робот треба да уради и где да буде у сваком тренутку. Други начин се састоји у томе да се опише где се налазе објекти и како са њима треба руковати. Овде се не специфицирају акције које робот треба да реализује већ оне треба да се аутоматски генеришу.

Ми ћемо се овде само кратко осврнути само на проблематику другог начина планирања извођења задатака уз напомену да ови проблеми још увек нису решени и да су и даље предмет истраживања.

Проблеме који се јављају можемо да поделимо на три главне групе:

- како генерисати путање робота у оквиру сцене ради реализацији задатака, тако да не дође до судара са другим присутним објектима (планирање трајекторија),
- како одредити позиције за хватање премета којим се рукује. Овај проблем се усложњава уколико се користи комплексна хватаљка (нпр.

вештачка шака) којом је могуће реализовати више различитих хватова, па је најпре потребно одредити врсту хвата, а затим је потребно одредити и место на објекту где се такав хват може применити,

- како генерисати програм за реализацију кретања објеката који су током извођења задатка у контакту (фина кретања) и за чију реализацију је потребно користити информације са сензора. Пример оваквог задатка који човек често изводи је убацивање кључа у кључаоницу без гледања при чему је тактилна информација од суштинског значаја за успешну реализацију. Еквивалентни индустријски задатак је убацивање објекта у отвор уколико су толеранције налегања уске (пег-ин-холе задатак).

а) Планирање трајекторија

Уопштено говорећи, код планирања трајекторија је могуће дефинисати један од два следећа проблема: где објекат А може бити постављен у области Р тако да не дође до судара (колизије) са било којим другим објектом Б који се налази у Р, и како одредити путању кретања објекта А кроз област Р од једне до друге позиције тако да током померања не дође до судара са другим објектима који се на сцени налазе. Сцена, за коју ће бити изложен један од приступа планирања трајекторије, се сматра статичком и дводимензионалном, док се објекти и препреке апроксимирају полигоналним линијама. Најчешће се решавању овог проблема прилази тако што се објекат А смањује до величине тачке, а препреке се увећавају да би се компензовала оригинална величине објекта. Затим се одређује скуп свих могућих, по сегментима праволинијских путања између увећаних објеката, а као решење се бира најкраћа.

Основна предност овог прилаза се огледа у олакшаном срачунавању пресека контура објеката и препрека тј. одређивању ситуација када долази до судара објекта и препрека. Много се лакше одреди пресек тачке са објектом него једне контуре објекта са другом. Мана оваквог прилаза је то што величина објекта треба да је позната унапред и не може се мењати. У случају различитих објеката које треба померити на исту локацију у оквиру сцене, комплетну процедуру треба поновити за сваки предмет. Друга мана је што овакав прилаз даје решења која су веома близу препрекама, што свакако није пожељно.

Уколико је дозвољено да предмет током кретања и ротира рачунарска сложеност се значајно увећава. Слична методологија се може применити и у случају тродимензионалног проблема. Овај проблем је решаван и другачијим прилазима, као што је, на пример, експлицитни опис слободног простора између објеката на сцени. Слободан простор је описиван низом генералисаних цилиндара, а путања је добијена нпр. спајањем њихових центара. Иако оваква путања није оптимална, пружа додатну сигурност да неће доћи до судара јер се објекат креће средином слободног простора. Осим тога, овај начин има предност јер опис простора и генерисана путања нису зависни од објекта који се преноси и могу да се користе за више њих.

Решавање задатка обилажења препрека обавља се на нивоу управљачког система робота. Такође се разматра дводимензионална сцена, али се објекти идентификују камером која се налази изнад, тако да објекти могу да буду на унапред непознатим локацијама. Око сваког објекта на сцени се дефинише потенцијално поље које делује на роботску хватаљку одбојном силом која

расте са смањивањем растојања између објекта (препреке) и хватаљке. Пре почетка кретања потребно је задати почетну и крајњу позицију објекта. Циљна локација на објекат делује привлачном силом. Систем започиње кретање од П ка К по правој линији. С обзиром да се сцена снима камером, стално је доступна информација о растојању хватаљке и суседних објеката, па се и одбојна сила може срачунати у сваком тренутку. Кретање хватаљке је резултанта деловања одбојних сила од објеката поред којих хватаљка робота пролази. Овај прилаз даје добре резултате чак и у случају покретних препрека. Проблеми могу настати уколико робот заклони сцену, пошто систем за визију стално мора да има јасну видљивост како би могао да буде одређен међусобни положај свих објеката.

Јасно је да је планирање путања на сцени, посебно уколико објекти (препреке) нису статички, још далеко од индустријски применљивог решења. Очекује се да би најбоље резултате дала комбинација планирања трајекторија на високом хијерархијском нивоу са адекватним управљањем на ниском хијерархијском нивоу.

б) Хватање

Развијени методи за одређивање места за хватање објеката се најчешће базирају само на геометријским карактеристикама предмета. Сложеност алгоритма свакако зависи од сложености саме хватаљке и њених способности за реализацију различитих хватова, али се у индустријској роботици најчешће користе хватаљке једноставне конструкције. Алгоритам за налажење позиција за хватање двопрстом паралелном хватаљком би могао да има следећу структуру:

- Елиминисати из разматрања све површине које ће бити активне током реализације задатка тј. које ће бити у контакту са другим објектима,
- Размотрити симетрију објекта,
- Наћи две приближно паралелне површине довољне величине за ослањање прстију, а чије међусобно растојање омогућава да објекат буде обухваћен прстима и ухваћен,
- Ако није могуће пронаћи две површине које испуњавају претходне услове треба покушати пронаћи једну површину и једну ивицу,
- Ако није могуће испунити ни тај услов треба поновити процедуру и покушати да се пронађу две ивице, или једна ивица и једна изводница или две или више изводница.

Уколико постоји више потенцијалних хватова који су одређени на основу геометрије објекта, избор хвата који ће бити примењен се реализује на основу додатних критеријума базираних на додатним информацијама: знању о задатку, општих ограничења, ... Овакав прилаз је посебно погодан уколико исти објекат треба хватати више од једном. Када се једном одреде сви могући хватови за одређену хватаљку и одређени објекат, нови хват је могуће одредити знатно брже одабирањем једног од већ дефинисаних хватова.

Проблематика хватања се знатно усложњава уколико је предмет сложене геометрије или исувише тежак, па је за његову манипулацију потребно користитити кооперативни рад два или више робота, а поготово уколико се ради о "нестандардним" објектима као што су сунђерасти или лако ломљиви објекти, тканине, ...

ц) Фина кретања

Када објекти којима робот манипулише дођу у контакт са околином, с обзиром да је немогуће остварити апсолутно тачно међусобно позиционирање, могу се појавити неочекивано велике контактне силе које су веома непожељне, јер могу да спрече даљу реализацију задатка, или да узрокују лом неког од објеката у контакту. У оваквим случајевима постају веома важна кретања објеката (при чему се захтева да се контакт одржава) којима се обезбеђује да ситуација не крене нежељеним током и да се реализација задатка настави. Оваква кретања се називају финим кретањима (енгл. *фине мотион*), за разлику од кретања којима се остварује преношење објекта у радном простору (енгл. *гросс мотион*).

Основа за успешну реализацију оваквих ситуација је сензорска информација о силама које се јављају на контакту, као и податљиво понашање самог објекта који треба лако да се адаптира на позиционе нетачности објеката у контакту. Веома је погодно да сензор којим се мере силе истовремено представља и елеменат који обезбеђује податљиво понашање објекта. Типичан пример задатка где су фина кретања изузетно важна је убацивање (нпр. цилиндричног) објекта у отвор (енгл. *пег-ин-холе*) уколико међу њима влада мали зазор. Сасвим је могуће да је зазор између објекта и отвора мањи од резолуције командованог кретања робота. Треба напоменути да се комерцијално могу набавити сензори силе и момента који се монтирају у зглоб хватаљке (између хватаљке и последњег сегмента механичке конфигурације) али су поред високе цене и веома осетљиви на преоптерећење што није погодно за индустријску примену.

Треба поменути да се решавању овог проблема прилази на неколико начина. Један је учење. На основу покушаја и остварених резултата систем учи и побољшава свој степен успеха. После завршеног обучавања реализовани програм се репродукује, али се не може гарантовати потпуни успех. За друге радне предмете обучавање треба поновити.

Други начин је формирање алгоритма који ће реализовати фина кретања само на основу сензорских информација. Мана овог прилаза је да у фази тестирања програма треба проверити што више деликатних ситуација, као и да сензоре треба често калибрисати јер се њихове карактеристике током времена могу мењати.

9.3 ДАЉИ РАЗВОЈ СИСТЕМА ЗА ПРОГРАМИРАЊЕ РОБОТА

Последњих година се примећује значајан напредак у развоју софтверских пакета за *офф-лине* програмирање које постаје доминантан начин програмирања. Мада је при програмирању још увек суштински потребно дефинисати положај хватаљке може се рећи да ови софтверски пакети иду великим

корацима ка језицима нивоа објеката. Тако је, нпр. у софтверском пакету РоботСтудио фирме АББ могуће дефинисати активности које се спроводе над радним предметом (и то у координатном систему објекта) при чему програмиране актвности на радном предмету (нпр. наношење лепка по одређеној контури) није потребно поново програмирати уколико се радни предмет у оквиру радног простора помери на нову локацију. Такође, ови софтверски пакети омогућавају симулацију рада робота у оквиру радног задатка чиме се могу уочити сви евентуални недостаци. Може се очекивати даљи напредак у овом смеру.

Треба напоменути да у склопу савременских програма за програмирање робота постоје и специјализовани софтверски пакети намењени одређеној групи задатака. Применом тих пакета (пакети за заваривање, бојење прскањем, палетизацију, послуживање машина,...) значајно се олакшава реализација одређене класа специјализованих радних задатака.

ЛИТЕРАТУРА

Angeles J., *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems - Theory, Methods and Algorithms*, Springer-Verlag, 2003.

Asada H., Slotine J.J., *Robot Analysis and Control*, John Wiley and sons, 1985.

Craig J., *Introduction to Robotics: Mechanics & Control,* Addison–Wesley, 1986.

Fu K., Gonzales R., Lee C., *Robotics: Control, Sensing, Vision and Intellignece*, McGraw-Hill, 1987.

Gini M., *The future of robot programming*, Robotica, 1987, Vol. 5, pp. 235-246

Koren Y., *Robotics for Engineers*, McGraw-Hill, 1985.

Selig J.M., *Introductory Robotics*, Prentice – Hall, 1992.

10. НЕКЕ СПЕЦИФИЧНОСТИ ПРИМЕНЕ РОБОТА

Примена робота у индустријским процесима одавно не изазива посебну пажњу већ је постала сасвим уобичајена пракса. Међутим, као и остали уређаји, и роботи су за неке задатке изузетно погодни а за неке нису. У овом поглављу ћемо покушати да укажемо на неке специфичности примене робота као и да јасно разграничимо који задаци су, на овом степену развоја индустријске роботике, погодни за роботизацију а који нису. При томе треба имати на уму да је област роботике веома динамична и да се изузетно брзо развија. Стога треба водити рачуна о томе да ће неки ставови који су овде изнети вероватно бити ускоро превазиђени.

10.1 НАБАВКА РОБОТСКОГ СИСТЕМА

Набавка роботског система (ту убрајамо не само робот већ и неопходне пратеће уређаје, прибор, сензоре и остало што је потребно за уређење радног места, као и хватаљку) мора бити заснована на детаљној анализи радног процеса, процени могућности његове ефикасне роботизације и, наравно, економској оправданости. Посматрано уопштено, роботизација је успешна уколико:

- смањује цену производње с обзиром да је рад робота јефтинији од људског, и да је робот флексибилнији од наменски пројектоване машине,
- повећава продуктивност смањењем времена потребног за обављање радног циклуса,
- побољшава квалитет производа јер је поновљивост покрета далеко боља него код човека (приметити да умор није фактор који утиче на квалитет рада робота) па су и одступања од планираних кретања мања,
- побољшава квалитет живота запослених јер је обављање опасних и монотоних послова пребачено на роботе. Не треба изгубити из вида да робот може у истом ритму да ради непрекидно и по три смене током радног дана.

При набавци робота треба водити рачуна и о трошковима додатних елемената роботизације радног места. Ти трошкови лако могу достићи цену самог робота и никако се не смеју занемарити. Наведимо неколико примера. Хватаљка робота се веома често посебно пројектује за конкретан радни задатак и набавља одвојено, често и од другог произвођача. Због безбедног и поузданог рада морају бити инсталисани додатни сензори, нарочито уколико робот долази у контакт са околином. Трошкови интсталације робота укључују припрему пода, израду постоља, довод електричне енергије и ваздуха под притиском. Да би се постигао висок степен структуираности радног места неопходна је његова посебна припрема (наменски пројектован радни сто, разни прибори, палете, ...). Трошкови одржавања се уобичајено процењују на 10% цене робота, годишње. И на крају, потребна је спољашња калибрациона апаратура ради идентификације стварних параметара робота чиме су програмирање и управљање роботом олакшани.

Осврнимо се укратко на економске аспекте набавке робота и објаснимо само неке основне идеје за процену економске исплативости роботизације радног места. Обележимо трошак куповине робота и његовог управљачког уређаја са R, трошкове припреме радног окружења са D, трошкове набавке хватаљке са G, трошкове набавке прибора за уређење радног места (дотурачи материјала, палете, ...) са F, трошкове набавке сензора са S, годишње трошкове одржавања са M. Годишње уштеде се остварују кроз смањене издатке за плате радника L, побољшаном квалитету Q, повећању производње I. Према томе, укупна капитална инвестиција износи:

$$C = R + G + S + D + F$$

док је укупна годишња уштеда

$$A = L + Q + I.$$

Анализу економска оправданости роботизације можемо извести на два начина: а) кроз период исплативости и б) кроз период повраћаја инвестиције. Анализом периода исплативости се утврђује за које време се исплати почетна инвестиција. Период P, у годинама, за који се исплати почетна инвестиција је укупна инвестиција подељена са укупном нето уштедом:

$$P = \frac{C}{A - M}.$$

Одређивање периода повратка инвестиције омогућава да се упореди предвиђени повраћај са другим, алтернативним инвестицијама. Ако се роботизација мора обавити кредитирањем, лако је упоредити предвиђени повраћај са ценом новца. Уводе се две нове променљиве: n - број година током кога желимо да посматрамо инвестицију, као и i – каматна стопа. Једначина која повезује n, i, C, A и M мора бити решена по i

$$A - M = C\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$

Истакнимо да инсталација првог робота у фабрици није увек заснована само на економским разлозима. Често је неопходно увести робот у производни процес да би се запослени привикли на присуство ове врсте машина и увидели њене карактеристике и перформансе. Понекад је, због изричитих захтева тржишта за побољшањем квалитета производа, у неким производним операцијама неопходна примена робота па се управа одлучује да их набави иако набавка није непосредно потакнута економским разлозима. Те прве инсталације често представљају основу за даљу роботизацију и потребно им је посветити посебну пажњу. Још једном треба напоменути да је при куповини робота веома важно да се схвате сви захтеви које роботизација задатка намеће. Примера ради, потребно је сагледати величину и облик потребног радног простора као и све могуће модификације задатка које могу бити од утицаја (нпр. носивост и тачност позиционирања драстично опадају како се робот приближава границама физички дохватљивог радног простора итд.). Тек када је све ово адекватно сагледано треба приступити избору робота имајући у виду да произвођачи данас нуде велики број варијанти које су омогућене

модуларношћу конструкције чиме се робот може додатно прилагодити свим захтевима и ограничењима, посебно ограничењима радног простора.

Осврнимо се и на проблем одабира и набавке хватаљке/алата. Хватаљка/алат је посебан уређај који се поставља на крај кинематског ланца робота. У случају да је потребно да робот преноси радни предмет од изузетне важности је да га хватаљка поуздано ухвати, да га довољно чврсто држи током манипулације (тако да не дође до оштећења, ни ње саме ни радног предмета) те да омогући реализацију намераваног задатка (нпр. одлагање радног предмета на жељену позицију у жељеном положају, или спајање са другим објектом тј. монтажу итд.). С обзиром да на данашњем степену развоја технички није изводљиво реализовати универзалну хватаљку која би по перформансама била упоредива са људском шаком, за сваки задатак се пројектује и реализује посебна хватаљка.

Пројектовање и израда хватаљке није једноставан задатак. Мада хватаљку може да пројектује и изради и сам корисник постоје и специјализоване фирме које се овим баве и често се хватаљка набавља засебно. Хватаљке се уобичајено реализују као механизми са два или више покретних сегмената (назовимо их „прстима“) који су конструктивно тако реализовани да омогућавају лако и поуздано хватање радног предмета. Често се хватаљке конструишу тако да одговарају за више предмета различите величине али исте класе, чиме се универзалност хватаљке повећава. Који од два основна начина покретања прстију (маказасти или паралелни) ће бити одабран зависи од самог задатка. Осим тога, хватаљке су неизоставно сензорисане, али у индустријској примени врло оскудно. Најчешћи сензори који се користе су само једноставни контактни прекидачи којима треба да се обезбеди информација да ли је предмет ухваћен или није и да се детектује његово евентуално испуштање током реализације задатка. Богатији сензорски систем који би обезбедио квалитетнију информацију би свакако био користан. Међутим, индустријска пракса на првом месту захтева изузетну поузданост која са порастом комплексности система опада. Од значаја је и цена хватаљке, као и цена и поузданост прилагодне и управљачке електронике неопходне за комплексну обраду сигнала.

Треба напоменути да се хватаљке праве тако да се објекти хватају увек на исти начин и да се у хватаљци увек налазе на истом месту. То се обезбеђује конструктивним решењима тако да се анулирају нетачности релативног положаја објекта и хватаљке пре самог хватања. То је неопходно да би се, у што већој мери, искористила способност робота да оствари високу тачност и поновљивост, како покрета тако и крајње позиције. Када би положај објекта у хватаљци могао да варира на неконтролисан начин, ова предност би се изгубила.

Хватаљке могу бити реализоване и тако да истовремено могу да носе више предмета (нпр. у задацима паковања или послуживања машина) чиме се ефикасност повећава. Осим тога, хватаљке могу бити реализоване као посебно конструисани механизми за хватање и преношење великих, тешких, еластичних или флексибилних објеката, који су непогодни за руковање нпр. џакова, гајби са пићем, великих пластичних одбојника за аутомобиле, итд. Треба напоменути да само хватање радних предмета не мора да буде неизоставно реализовано „прстима“ већ се, у зависности од врсте радног предмета, могу користити и други начини. Тако је нпр. лимене делове приликом улагања у пресу и вађења из ње погодније хватати помоћу вакуумских сисаљки. На исти начин је погодно манипулисати глатким и флексибилним објектима, као

што су нпр. кесице кафе приликом паковања у кутије. Хватаљке могу имати и друге „нестандардне“ начине хватања (магнетима, флексибилним прстима који се покрећу ваздухом под притиском итд.) који се бирају тако да омогуће ефикасан и поуздан рад у дугом временском периоду.

Уместо хватаљке робот може да носи посебан алат којим реализује постављени задатак као што је: апарат за заваривање, прскалица за бојење, уређај за полирање или чишћење површине (нпр. пескарењем), ласерски уређај за просецање, уређај за инспекцију квалитета површине, уређај за наношење лепка или заптивне масе по одређеној контури....

Посебан проблем представља манипулисање лаким и изузетно флексибилним објектима као што су нпр. тканине. Хватаљке којима се реализују овакви задаци су веома сложене, и њихова конструкција још увек представља предмет интензивних истраживања тако да се у индустријској пракси веома ретко срећу.

10.2 ИНСТАЛАЦИЈА И КОРИШЋЕЊЕ РОБОТА

Робот се производи и испоручује тако да одмах по инсталацији може бити оперативан. Његова конфигурација, распоред зглобова, димензије, положаји граничних прекидача, тип и резолуција сензора, прикључни алати, као и све остало што је дефинисано у процесу наручивања, већ је идентификовано код произвођача и смештено у конфигурациони фајл у контролеру. Наравно, приликом монтаже и даље, приликом коришћења, тај конфигурациони фајл може бити измењен од стране овлашћеног корисника.

Током процеса инсталације је неопходно реализовати додатна подешавања и прилагођавања роботског система конкретним условима. Постављање робота може бити реализовано на различите начине. Осим на наменски пројектовано постоље које је чврсто повезано за под, робот може бити постављен и на клизну шину (чиме систем добија још један степен слободе кретања), на полицу или чак на таваницу при чему се предмету рада приступа одозго. Постављање робота неминовно захтева обезбеђење од судара са околином. Наиме, у радном простору робота могу да постоје препреке (зидови, под, плафон, други објекти и машине, ...) па је потребно увести посебна механичка ограничења у зглобове минималне конфигурације тако да се опсег кретања зглоба смањи и тиме спречи појава судара. І на крају, посебно је важно да се за тако постављен робот, на радном положају, сензори робота прецизно калибришу, идентификује стално постављени алат и слично. Нека од тих питања ће бити обрађена у тексту који следи.

10.2.1 Постављање робота на клизни механизам

У специфичним случајевима као што су процесне операције које захтевају велики захват (нпр. електролучно заваривање по дугој путањи), опслуживање две или више машина у низу једним роботом, реализација операција обраде на покретним предметима рада (аутомобилска каросерија на конвејеру), робот се поставља на клизни механизам – моторизовану шину која помера робот са постољем на захтевану позицију, како је приказано на сл. 10.1.

Карактеристике типичног клизног механизма су: носивост до 2 тоне, дужина до $8m$, позиционирање $\pm 0.1mm$, брзина до $2m/s$, мах. убрзање до $1.5m/s^2$. Структура управљачког система клизног механизма је идентична



Слика 10.1: Робот постављен на клизни механизам

структури управљачког система за било који од степени слободе, тј. за било који зглоб. Контролер робота омогућава придруживање управљачком систему додатног степена слободе па је због тога интеграција овог додатног степена слободе веома једноставна. По иницијализацији система, робот и механизам постају јединствена оперативна целина чиме се и програмирање своди на већ постоје ће програмске секвенце на које се суперпонирају команде за позиционирање механизма за транслацију.

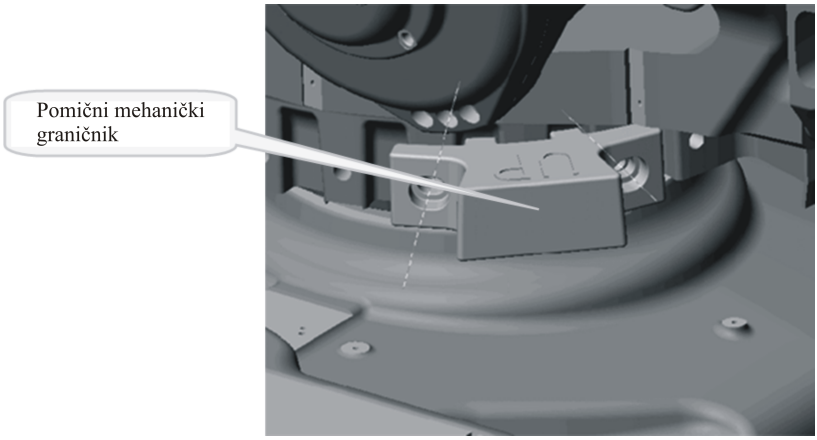
10.2.2 Ограничавање радног простора

Додатно ограничавање радног опсега робота у складу са ограничењима радне средине обавља се постављањем механичких ограничења у зглобовима минималне конфигурације и, евентуално, још у четвртом зглобу робота. Уобичајено се на сваких десет степени на прва два степена слободе остави простор за смештање механичких граничника који се причвршћују вијцима. Пример механичког граничника на првом степену слободе робота АББ ИРБ 6400 је приказан на сл. 10.2

Да би ова механичка ограничења била интегрисана у управљачки софтвер, могуће је да се на посебно пројектоване локације поставе додатни механички прекидачи, два или више у једном од прва три зглоба, и по два на наредна три. Овим прекидачима ће достизање нових граничних положаја бити детектовано и контролер обавештен.

10.2.3 Безбедносни систем и заустављање

У досадашњој пракси, постоји неколико случајева у којима су радници (тј. послужиоци) страдали од судара или ударца робота. Индустријски робот, још увек није у стању да уочи промене у околини које настају мимо његовог утицаја, тј. оне о којима његов или надређени контролер нису информисани. Робот не види човека нити може предвидети његову намеру па се у циљу



Слика 10.2: Пример механичког граничника првог степена слободе на роботу фирме АББ.

заштите радника постављају додатни сензори (као што су 3D камере или оптичке сензорске завесе) којима се детектује уколико неко уђе у радни простор и тренутно обустављају активности робота или се покрети значајно успоравају. Када се услови за несметан рад поново стекну робот наставља рад.

Поред детекције "уљеза"у радном простору постоји (сл. 10.3) читав низ сигурносних прекидача: гранични прекидачи на крајевима безбедног простора у сваком зглобу, спољашњи безбедносни прекидач (није саставни део робота) и безбедносни прекидач на контролеру и на конзоли. Уобичајено је да се ЛЕД индикацијом на управљачком орману и на конзоли за управљање укаже да је укинута дозвола рада мотора. Постоји посебна процедура наставка рада која подразумева уклањање свих узрока прекида.

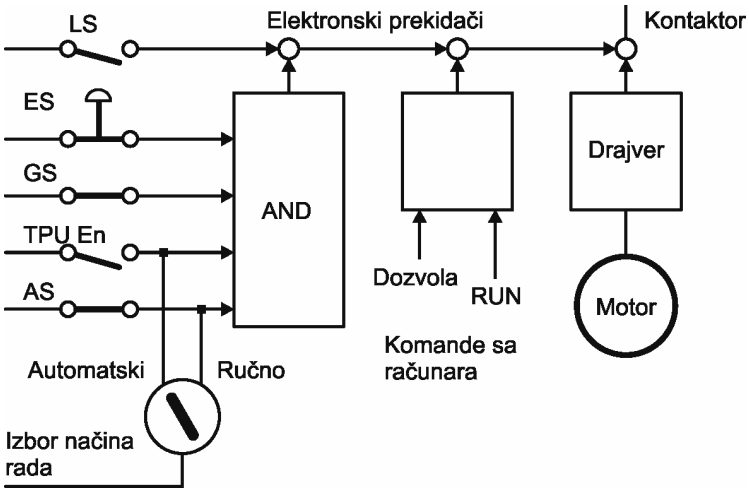
Основу овог безбедносног система чини двоструки низ електричних компоненти које су повезане са управљачким системом робота и на основу чијег стања се дозвољава рад моторима. Сваки од безбедносних кругова се састоји од неколико прекидача, од којих сваки мора бити затворен пре него што се изда дозвола рада моторима. Ако је било који од прекидача отворен, сви мотори остају без дозволе за рад, што значи да им је прекинуто напајање преко релеја и активиране су кочнице.

Нагли престанак рада је условљен настанком или предвиђањем опасности по људе или опрему. Посебни прекидачи за прекиде, карактеристичног печуркастог облика и јарко црвене боје (ТОТАЛ-СТОП или НОТ-АУС тастери), са закључавањем, се налазе на операторском мобилном панелу (конзоли) као и на управљачком орману. Ови прекидачи су саставни део ланца безбедности и морају задовољавати све услове који се односе на поузданост и једнозначност рада, морају бити отпорни на удар и слично. Приликом активирања кола заштите, контролер робота започиње маневар одступања од задате трајекторије којим се покушава ублажавање судара са околином.

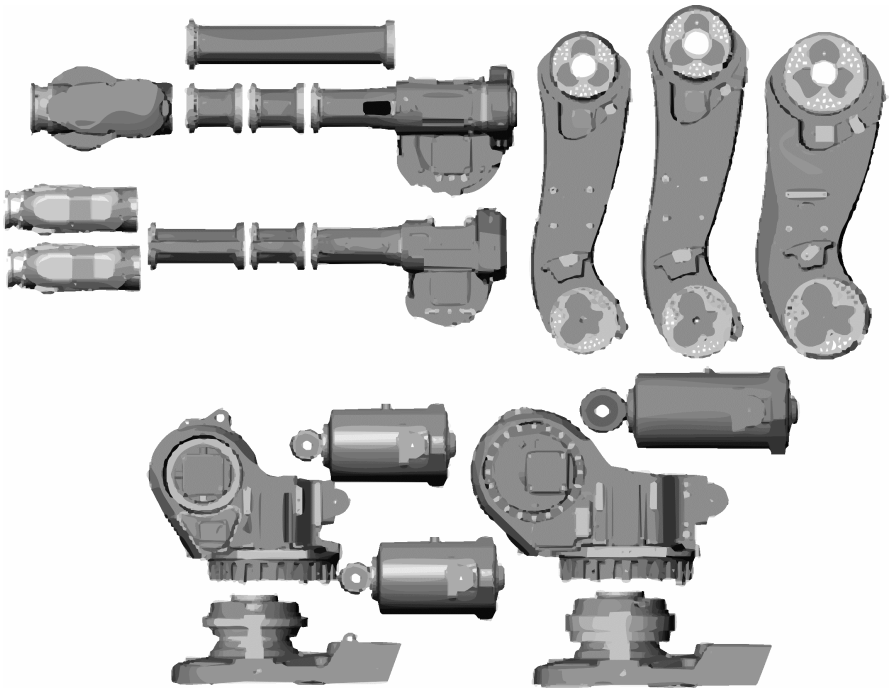
10.3 КАЛИБРАЦИЈА

На захтеве купаца да набаве робот који најбоље одговара њиховим потребама произвођачи одговарају покушајем да се са само неколико типова робота а уз многобројне варијације по сваком типу, покрије што већи број захтева. Ово доводи до модуларног прилаза у конструкцији робота што је илустровано сликом једне фамилије робота на сл. 10.4. Међутим, иако су номиналне димензије и остали параметри свих сегмената и осталих елемената роботског система унапред прописани приликом израде и монтаже долази до одступања па тако сваки конкретни робот има "своје сопствене"параметре. За сваки робот се по склапању морају посебно идентификовати, израчунати или проверити, барем геометријски параметри. Циљ калибрације је да се утврде стварни параметри сваког конкретног робота јер ће неправилно калибрисан робот заузимати нетачне позиције у простору,а може доћи и до судара са околином.

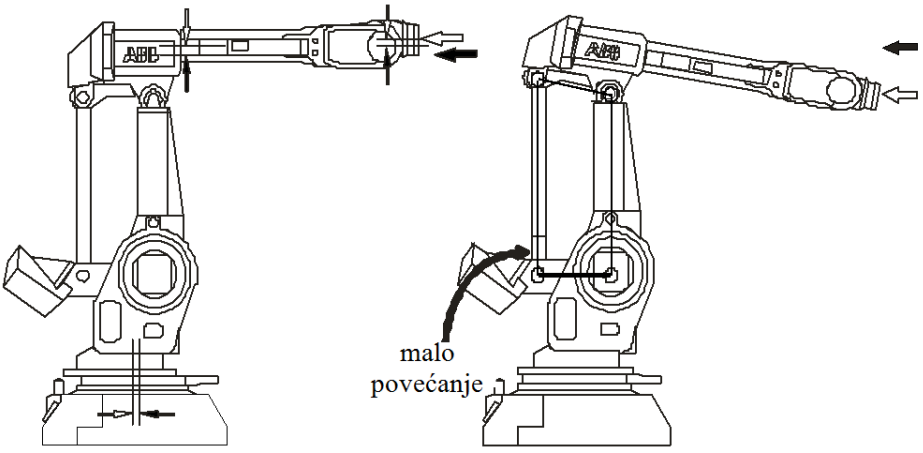
Извор нетачности позиционирања врха робота (што је илустровано на сл. 10.5) већ склопљеног робота може бити геометријске природе (нетачна дужина сегмената, грешка у оријентацији оса робота, нетачан положај основе робота у простору) или друге природе (ексцентричност редуктора, зазор у редукторима, еластичност у трансмисији и зглобовима, грешке при очитавању позиције у зглобовима итд.). Због тога постоји неколико специфичних видова калибрације. Први је калибрација унутрашњих сензора за очитавање позиције у зглобовима робота (енкодери, ризолвери), односно утврђивање њиховог референтног положаја. Други је калибрација геометријских карактеристика, због одступања која су настала као последица толеранција при изради. Трећи је калибрација динамичких параметара, односно њихова идентификација. Све ове активности имају за циљ да се робот, нарочито под оптерећењем, у радном простору понаша у складу са декларисаном тачношћу.



Слика 10.3: Пример кола за издавање дозволе рада моторима: ЛС: Гранични прекидач; ГС: Безбедносни прекидач при ручном раду; ТПУ Ен: Прекидач за ручно управљање; АС: Безбедносни прекидач при аутоматском раду; ЕС: безусловни прекид рада.



Слика 10.4: Пример модула једне фамилије робота за велику носивост.



Слика 10.5: Утицај нетачности димензија на положај врха робота.

Поступак калибрације подржан је системским софтвером који произвођачи испоручују уз робот. За подршку калибрацији геометријских карактеристика се користи ласерски даљиномер на управљаном постољу са два ротациона степена слободе. Робот носи карактеристичан предмет са рефлектујућом површином коју ласерски даљиномер може детектовати. Системски део софтвера, током калибрације, командује и роботу и даљиномеру заузимање одређеног положаја у простору. По заузимању положаја, робот јавља да је завршио операцију и чека да даљиномер одмери растојање до рефлектујуће површине. Познавајући геометрију предмета, његов положај у хватаљци (обично је једнозначан), и претпостављајући ДХ параметре и кинематски модел робота, око стотину мерења ће бити довољно да се у релативно малом делу радног простора добије компетентан кинематски модел за корекцију стварних карактеристика тако да се добије висока тачност позиционирања. Уобичајено је да се калибрација обавља посебно у оним деловима радног простора који садрже већину, или све, процесне операције, а да се у осталим деловима простора, где робот само пролази, обави мање детаљна калибрација. Резултат калибрације чине компензациони параметри који се придружују документу који је јединствен за сваки произведени робот.

10.3.1 Калибрација положаја и идентификација ДХ параметара

Први, веома важан поступак калибрације је иницијална калибрација (одређивање матрице калибрације $\mathbf{C}$, из великог броја мерења стварног и командованог положаја) одмах по завршеном склапању робота. Односи се на калибрацију ДХ параметара као и на калибрацију динамичких параметара самог робота, без оптерећења. Тако идентификовани параметри се смештају у системску меморију контролера и чине личну карту робота. Основна идеја о начину одређивања матрице калибрације $\mathbf{C}$ је изложена у тексту који следи. Претпоставимо да је директни кинематски модел робота познат и дат релацијом

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{\Phi}) \tag{10.1}$$

где је скуп свих ДХ параметара дат вектором

$$\mathbf{\Phi} = [\boldsymbol{\theta} \quad \boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{a} \quad \mathbf{d}]^T \tag{10.2}$$

Веома је важно да се сви ДХ параметри обухвате калибрацијом – ни један од њих се не сме унапред прогласити нулом, иако референтне вредности могу да садрже доста нула у ДХ табели. Посматрајмо први извод вектора положаја врха робота.

$$\Delta\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\Delta\boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Delta\boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}}\Delta\mathbf{a} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}}\Delta\mathbf{d} \tag{10.3}$$

Поједностављујући запис, добија се

$$\Delta\mathbf{x} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}}\right]\Delta\mathbf{\Phi} \tag{10.4}$$

Управо је матрица парцијалних извода из једначине (10.4), калибрациона матрица $\mathbf{C}$.

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{C}\Delta\mathbf{\Phi} \tag{10.5}$$

Овим су повезане грешке остваривања позиције са грешкама (одступањима) вредности ДХ параметара. Узмимо сада најмање четири различите тачке у простору, од којих свака има своју матрицу $\mathbf{C}$ и поставимо једначину

$$\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x}_1 \\ \Delta\mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \Delta\mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{C}_1 \\ \Delta\mathbf{C}_2 \\ \vdots \\ \Delta\mathbf{C}_n \end{bmatrix} \Delta\mathbf{\Phi} \tag{10.6}$$

или, поједностављено,

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{D} \cdot \Delta\mathbf{\Phi} \tag{10.7}$$

При томе, одступања вредности ДХ параметара могу се добити псеудо-инверзијом.

$$\Delta\mathbf{\Phi} = (\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{D}^T \cdot \boldsymbol{b} \tag{10.8}$$

где је $(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{D}^T$ псеудо-инверзија матрице $\boldsymbol{D}$. Коначно, нове вредности ДХ параметара добијају се модификовањем почетних вредности

$$\mathbf{\Phi}' = \mathbf{\Phi} + \Delta\mathbf{\Phi} \tag{10.9}$$

Поступак се понавља све док се не постигне конвергеција ка стварним вредностима ДХ параметара. Слична процедура, уз другачију полазну једначину и матрицу $\mathbf{\Phi}$, може бити изведена и за калибрацију затворених кинематских ланаца, калибрацију инерцијалних параметара и маса сегмената и оптерећења, калибрацију сензора силе, и калибрацију маса потребних за компензацију гравитације.

10.3.2 Калибрација сензора положаја у зглобовима

Други скуп поступака калибрације се односи на инсталацију робота, или на калибрацију после премештања на друго радно место или током редовних и ванредних (хаваријских) поступака одржавања. Ови поступци су прилагођени самосталном раду корисника. За њих је обично потребно неколико додатних алата који ће се повезати на контролер (нпр. мерни штап, мерна картица која континуално прати текући положај робота итд.). У даљем тексту изложићемо само два калибрациона процеса: калибрацију офсета инкреметалних сензора у зглобовима и калибрацију положаја врха робота у радном простору.

Мерни систем робота се минимално састоји из једног сензора по оси (зглобу) и мерне картице која континуално прати текући положај робота тако да се, и после заустављања може поуздано и безбедно наставити кретање. Картица такође има и меморију довољну да робот, и после гашења, може наставити са кретањем без потребе да се референцирају сензори по свакој од оса. Ово је напредак у односу на ранија решења када је сваки зглоб робота имао по један инкрементални сензор позиције и одређени број прекидача неопходних за дефиницију физички дозвољеног кретања, радног простора и довођење у референтни (*енгл.* хоме) положај. Робот се при томе, приликом сваког почетка радног циклуса или после неког непланираног догађаја морао референцирати тако што се по довођењу у почетни (*хоме*) положај садржај бројача који добијају такт са сензора проглашавао нулама.

Мерни систем се обавезно при томе мора калибрисати онако како је

дефинисано у претходном поглављу, нарочито ако било који ризловер претрпи неку измену. То се обично може десити када: делови који чине калибрациони систем промене свој положај на роботу или бивају замењени другима, или када се садржај меморије измени или испразни (батерија је испражњена, јави се грешка на ризолверу, прекинут је ток сигнала ризолвера и мерне картице, осе робота су биле померене без учешћа управљачког система).

Калибрација започиње заузимањем калибрационих, тзв. нултих, позиција сваког од зглобова и одвија се по редоследу, почев од првог па до последњег, шестог зглоба. На сваком зглобу су постављене ознаке које олакшавају припрему робота за калибрацију. Калибрација сензора се обавља ручним померањем са конзоле појединачних зглобова (један по један) малим брзинама, све док се мерни штап претходног сегмента, по један за сваку осу, не постави у један од три отвора наредног сегмента. Потом се постављају наменски пројектовани сензори на референтни положај. Очитане вредности са сензора представљају вредности које се уписују у мерни систем и одатле ризолвери настављају са радом.

10.3.3 Неке специфичности калибрације код заваривања

Карактеристичан калибрациони алат користи се код алата за електролучно заваривање, с обзиром на облик који не дозвољава класичан, механички начин калибрације упаривањем комплементарних геометријских облика. Наиме, завршетак алата за електролучно заваривање је танка жица за заваривање, пречника реда величине милиметра и веома је тешко пронаћи ТЦП на класичан начин, посебно и због тога што је жица осно симетрична. Калибрациони алат састоји се из прецизно израђеног и позиционираног држача у облику слова У кроз који може проћи алат за завараивање, сл. 10.6.



Слика 10.6: Прибор за калибрацију робота за електролучно заваривање

На врховима слова У се налази оптички прекидачки пар који детектује присуство алата на линији. У подножју слова У налази се индуктивни сензор који може детектовати присуство танке жице. Познавајући приближну геометрију алата за заваривање као и дужине жице, робот са алатом може заузети приближан положај у коме активира индуктивни сензор истовремено пресецајући светлносни сноп. У том случају, за познату позу робота и познат положај и оријентацију жице, добија се један од низа парова неопходних за калибрацију. Прерачунавањем нових параметара геометрије и смештањем у меморију контролера, наставља се са радом.

10.4 ОСНОВНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ ЗАДАТАКА У КОЈИМА СЕ ПРИМЕЊУЈУ РОБОТИ

Роботи се уводе у радне процесе у којима је пре тога био ангажован човек. Стога се квалитет рада робота увек процењује упоређивањем са резултатима које су остваривали радници.

Уобичајено се наводе следећи разлози за увођење робота: подизање квалитета производа, замена човека на за њега неодговарајућим радним местима, снижење трошкова по јединици производа и повећање флексибилности производног система.

Подизање квалитета се може остварити у задацима где се захтева: висока тачност позиционирања, висока поновљивост, дугачки периоди високе концетрације радника и високо прецизна инспекција, контрола и мерење коришћењем сензора. Тако, на пример, уобичајено одступање приликом позиционирања алата за електроотпорно заваривање код радника износе $10 - 30mm$, а при примени робота $0,5 - 1mm$, угаоно удступање алата за заваривање у случају ручног заваривања је 10°-20° а при употреби робота око 1◦. Задатак инспекције квалитета бојених површина аутомобила наведен у Поглављу 1 представља типичан пример радног задатка који се изводи коришћењем сензора, који је монотон и захтева продужену концетрацију.

Такође треба роботизовати радна места на којима је потребно руковати великим теретима, где су послови монотони, или су радна места контаминирана (испарења, велика бука, топлота и прашина) као и радна местима где се континуално јавља потреба за високим степеном концетрације. Контаминација радног простора се јавља у многим радним задацима: у одељењима за бојење се јавља висока концетрација растварача који испаравају после наношења боје, у оделењима са пресама влада велика бука која може да штети слуху, ливнице и оделења за заваривање су по правилу контаминиране прашином, продуктима сагоревања и топлотом. Роботима се веома успешно може заменити човек у свим овим задацима.

Генерално говорећи, са техничког аспекта посматрано примена робота је условљена њиховим перформансама. Основне карактеристике савремених робота које су значајно боље од човекових су веома висока тачност и поновљивост остваривања задате позиције и оријентације у простору и веома висока тачност и поновљивост праћења предефинисаних трајекторија. Према томе, свака апликација код које су главни захтеви тачно позиционирање или тачно праћење трајекторије, а где перформансе робота задовољавају или превазилазе постављене захтеве, може бити успешно роботизована.

Индустријске задатке који се могу роботизовати можемо према сложености самог задатака сврстати у неколико класа (нивоа):

- У задатке најнижег нивоа (Ниво 1) спадају примене код којих су све компоненте и алати на познатим локацијама. Да би се то обезбедило користе се палете, позиционери и додавачи. У задацима овог нивоа не постоји потреба за додатним сензорима. Примери задатака који овде припадају су: електроотпорно (тачкасто) заваривање, полагање заптивне масе, бојење, ... Све компоненте које се уграђују морају бити у границама захтеваних толеранција, као и тачност и поновљивост самог робота.

- У задацима Нивоа 2 се захтева повратна спрега са сензора да би се понашање робота прилагодило малим одступањима димензија радних предмета. Пример задатака који припада овом нивоу је електролучно заваривање, јер приликом формирања шава који треба заварити може доћи до одступања у димензијама која су већа него што је прописано па је потребно модификовати положај уређаја за заваривање. Овај проблем се превазилази употребом сензора (систем визије, мерење струје електричног лука, ...) на основу чега се врх жице за заваривање прецизно позиционира у односу на шав. Тачно позиционирање и праћење шава је од суштинског значаја за многе примене где се јавља заваривање јер повећано локално загревање утиче на квалитет завареног споја.

- У задацима Нивоа 3 се захтева комплекснија повратна информација са сензора, нпр. препознавање облика коришћењем роботске визије, на основу чега може бити неопходно и доношење одлука. Пример оваквог задатка је роботизовано монтирање точкова приликом производње аутомобила. При реализацији овог задатка је неопходно пронаћи точак и утврдити оријентацију отвора кроз које пролазе вијци којима се точак монтира како би се точак правилно позиционирао и вијцима учврстио.

- Најсложенији су задаци (Ниво 4) где се јавља непредвидљиво понашање било радних предмета или опреме у ћелији. Тако је нпр. веома тешко руковати гуменим цревима или подним облогама као што су таписони.

Посебно је важно напоменути коју врсту задатака у овом тренутку роботи нису у стању да реализују боље или на исти начин као човек. Пре него што одговоримо на ово питање напоменимо да је једна од веома важних карактеристика савремених робота, поред остваривања високе тачности, и веома висока крутост држања позиције. Наиме, висока тачност захтева веома висока појачања повратних спрега по грешкама позиционирања зглобова, што узрокује да робот веома круто држи достигнуту позицију и да се веома интензивно „опире“ сваком утицају које би имало за последицу да својим деловањем угрози достигнуту тачност позиционирања.

Када је у питању монтажа производа код којих су зазори делова који се спајају мањи од грешке позционирања робота монтажа је практично онемогућена. Наиме, када дође у захтевани положај робот са енкодера у зглобовима има информацију да је остварио захтевану позицију и настоји да ту позицију одржи. Уколико дође до контакта делова који се спајају контактна сила делује на објекат који робот држи хватаљком и тежи да га помери из тренутне позиције, чему се робот опире. Стога, мале грешке у међусобном позиционирању могу да изазову контактне и силе трења великог интензитета које практично онемогућавају наставак монтаже. Треба уочити да код монтажног задатка није у питању апсолутно позиционирање робота у простору већ релативно позиционирање једног објекта у односу на други. С обзиром да је захтевану тачност позиционирања практично немогуће постићи ова класа задатака[1] је практично остала изван домена роботизације. Једини изузетак је

[1] Уређајем РЦЦ (Ремоте Центре оф Цомплианце) се пасивним подешавањем могу апосорбовати мале грешке позиције и оријентације објекта који робот носи при реализацији монтажног задатка. Обзиром да сваки радни пред-мет има различите карактеристике сваки пут треба пројектовати нов уређај тако да овај прилаз није заживео у прак-си. За више детаља видети нпр. С.Х. Драке, Усинг цомплианце ин лиеу оф сенсору феедбацк фор

монтажа делова који имају еластичне делове (нпр. електронски чипови који имају флексибилне ножице) па се еластичним деформацијама ових делова аутоматски апсорбују нетачности позиционирања (које су, подсетимо се, веома мале) па се монтажа може веома успешно реализовати.

Када је монтажни задатак у питању треба поменути и задатак спајања делова навојном везом. С обзиром да је у овом случају потребно веома тачно реализовати два спрегнута кретања (увртање и аксијално померање), као и да постоји могућност заглављивања вијка у делу у који се уврће ови задаци се реализују коришћењем посебних уређаја. Када год је то могуће треба, при реализацији роботом, навојну везу заменити неком другом врстом споја.

Осим тога, роботи, уопштено говорећи, не могу успешно да реализују задатке код којих је потребан читав низ сензорских информација (додир, визија са препознавањем облика, слух, ...), а посебно уколико их је потребно интегрисати. Тако, на пример, роботи тешко рукују флексибилним материјалима као што су тканине или дугачке жице, а нису пouздани ни у процесима где квалитет улазних компоненти није строго контролисан. Радник ће веома лако уочити неисправан део и одбацити га док ће робот настојати да га угради.

Такође треба напоменути да се све чешће могу срести случајеви да су роботи део радног процеса где је доминантно заступљена класична аутоматизација, а роботи се користе само за део радног процеса. Веома је илустративан пример аутоматизованог одређивања класе керамичких плочица путем сензора и њиховог паковања коришћењем робота. Наиме, класа керамичких плочица искључиво зависи од деформација или чак оштећења (напрслина) које настају током печења. При ручном начину рада радници визуелно класификују и према дефинисаној класи пакују плочице. Међутим, на роботизованој линији се низом сензора мере деформације, а овај податак се директно саопштава управљачком уређају робота који их онда пакује у одговарајуће кутије. Оваквим начином је процес веома убрзан, квалитет класификације побољшан и устаљен, а потреба за радном снагом је смањена.

Такође треба истаћи да је важна карактеристика примене робота у индустријским задацима недостатак универзалне хватаљке чије карактеристике би биле упоредиве са пеформансама људске шаке и која би била универзално применљива. Стога је важно напоменути да је карактеристично за примену робота и то да је у сваком задатку неопходно пројектовати посебну (специјализовану) хватаљку потпуно прилагођену специфичностима задатка. Конструкција пouздане хватаљке је веома деликатан задатак. Велики део проблема који се јавља у производњи није узрокован роботом већ хватаљком.

Најчешће је у употреби хватаљка са „прстима“ са два наспрамна или три симетрично распоређена прста. Сви прсти обично имају један заједнички погон тако да је објекат после хватања центриран. Двопрсте хватаљке могу бити паралелног или маказастог типа. Поред тога, често се користе и вакуумске хватаљке, најчешће за лако ломљиве и лагане а кабасте објекте. У сваком случају је неопходно да објекти имају глатку површину која омогућава пouздано пријањање вакуумских сисаљки. Приликом пројектовања хватаљки треба водити рачуна о потребној сили хватања приликом чијег одређивања

аутоматиц ассем-блу, Пх.D. диссертатион, МИТ, 1977, . D. Wхитнеу, Qуаси-статиц ассемблу оф цомплиантлу суппортед ригид партс, ACME J Дун Суст Меас Цонтрол 104 (1982), 65–77., D. Wхитнеу, Парт матинг ин ассемблу, Хандбоок оф индустриал роботицс, едитед бу C.Y. Ноф, Јохн Wилеу, Hew Yорк, 1985, пп. 1084–1116.

треба узети у обзир не само тежину објекта већ и убрзања током кретања робота. Други важан елеменат о коме треба водити рачуна је коефицијент трења између хватаљке и објекта, који се може повећати коришћењем гумених уложака. То, међутим, захтева интензивније одржавање због хабања. Такође треба водити рачуна о тежини саме хватаљке чија тежина улази у носивост робота. Погон хватаљки је најчешће пнеуметски или електрични.

Посебно су значајна питања: одржавање робота и безбедност. С обзиром да сваки произвођач користи своје управљачке и погонске системе веома често је потребно да за одржавање робота различитих произвођача постоје посебно обучени специјалисти.

10.5 КАРАКТЕРИСТИЧНИ ПРИМЕРИ ПРИМЕНЕ РОБОТА

У тексту који следи ћемо навести само неке од карактеристичних примера примене робота у индустријским задацима.

Послуживање машина

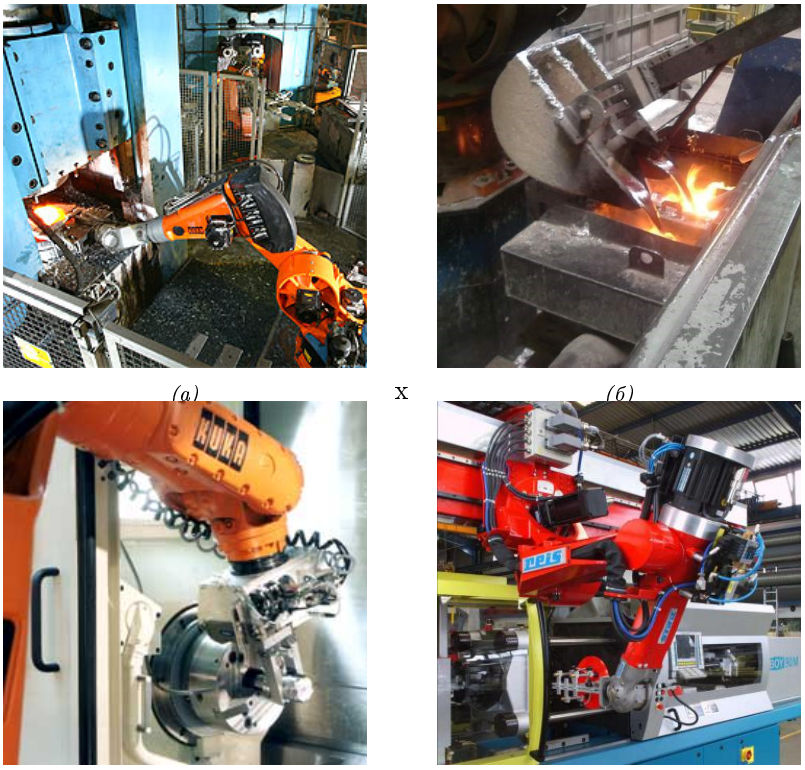
Послуживање машина представља један од првих примера примене робота. Овај задатак је изузетно монотон, а зависно од величине и температуре радних предмета може бити и изузетно напоран. На сл. 10.7 су приказани примери послуживања пресе за ковање, алатне машине, уливање течног алуминијума у калуп и вађење одливака од пластике. У случају да процес то дозвољава један робот може послуживати и више машина. Треба напоменути да роботи могу бити монтирани на хоризонталну шину изнад машине (сл. 10.7г).

Палетизација, депалетизација, паковање

Палетизација и паковање представљају веома погодан задатак за роботизацију. Мада роботи који се користе у ове сврхе могу бити различитих конфигурација (нпр. Делта робот паралелне конфигурације који може изузетно агилно да се креће) роботи антропоморфне конфигурације се најчешће срећу. Роботи који се користе за задатке палетизације су у одређеној мери специфични. Они треба да имају способност захвата објеката великих маса и запремина на удаљеном месту у односу на основу уз поједностављену манипулацију при приласку предмету и по његовом одлагању. Због тога, уместо масивних зглобова и сегмената, имају продужен и ојачан други и трећи сегмент са паралелограмом који кретања трећег мотора преноси на два зглоба истовремено, док су први и други мотор и сегмент као код обичног антропоморфног робота (сл. 10.8). Последњи степен слободе служи само за оријентацију предмета. Веома често се при паковању роботи комбинују са аутоматизованом линијом ради бољих ефеката.

Задаци реализације сложеног просторног покрета или путање

Код ових задатака роботи реализују веома прецизно сложене просторне путање. На сл. 10.9а је приказано исецање ласерским алатом отвора на



(а) *(б)* *(в)* *(г)*

Слика 10.7: Послуживање машина: а) улагање у пресу за ковање усијаних металних припремака, б) уливање у калуп течног алуминијума ц) улагање радног предмета у алатну машину, д) вађење пластичног одливка роботом који је монтиран на шини изнад машине

пластичном одливку. Задаци овог типа се могу реализовати и другим алатима, зависно од материјала који се сече, нпр. водом под притиском, глодалом, ацетиленским гориоником, . . .

На сл. 10.9б је приказано урањање ливачког модела од стиропора у густу течну масу која треба да се равномерно разлије по моделу и осуши тако да слој буде пођеднаке дебљине. Да би се на моделу формирао такав слој робот током сушења на програмиран начин обрће модел да би спречио сливање течне масе на једну страну и формирање осушеног слоја неравномерне дебљине. Овај метод ливења коришћењем модела од стиропора се на енглеском назива „лост фоам".

Заваривање

Заваривање (поред бојења прскањем) представља задатак где је примена робота доминантна (сл. 10.10). Код тачкастог електроотпорног заваривања



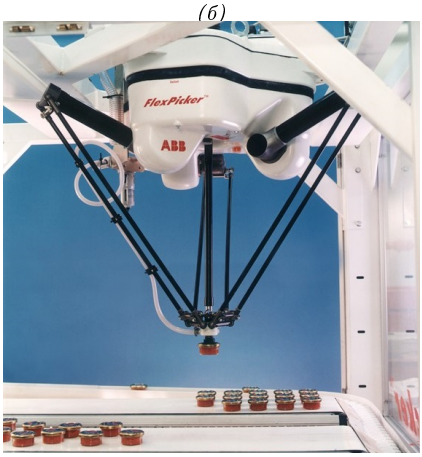
(а)



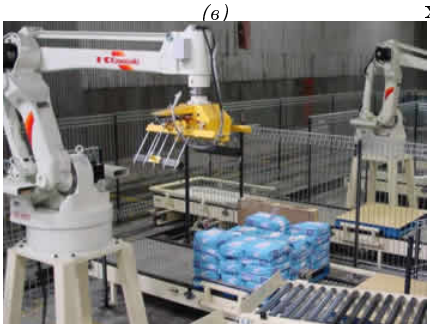
(б)



(в)



(г)



(д)



(ђ)

Слика 10.8: Палетизација: а) пакета са воћним соковима, б) брашна у папирнатим кесама, ц) гајби са млечним производима, д) конзерви са паштетама, е) џакова, ф) универзална хватаљка за различите типове гајби.



(а)



(б)

Слика 10.9: Задаци при којима се реализује сложена просторна путања: а) исецање ласером отвора на пластичном одливку, б) сушење ливачког модела од стиропора после умакања у течност ради формирања равномерног покривног слоја

лимова робот клештима за заваривање обухвати лимове које заварује, кроз клешта се пропусти струја па се лимови на месту контакта са клештима топе. Услед притиска се спајају. Основна предност робота код ових задатака је тачно позиционирање (веома тешког) алата за заваривање чиме се остварује постојан квалитет. Код електролучног заваривања робот обезбеђује веома тачно праћење захтеване путање шава уз остваривање свих захтеваних параметара који утичу на квалитет завареног споја.

Систем за заваривање који се уобичајено испоручује заједно са роботом садржи извор напајања, систем за локално топљење метала при остваривању споја (заваривање може бити електролучно, електроотпорно, ласерско, ...) као и одговарајућу софтверску подршку за генерисање програма за кретање робота.

Произвођачи робота нуде посебно конструисане роботе за заваривање, као и сву неопходну пратећу опрему. Прибори којима се делови који се заварују држе у захтеваном положају током процеса заваривања се посебно пројектују за сваки производ.

Бојење прскањем

Роботизовано бојење прскањем представља (поред заваривања) индустријски задатак у којем роботи постижу далеко боље резултате од људи. Разлог је способност робота да веома прецизно понавља програмиране покрете наносећи тачно одређене количине боје тако да се остварује изузетно добар квалитет бојене површине. Осим тога, ова радна места су контаминирана испаравањем

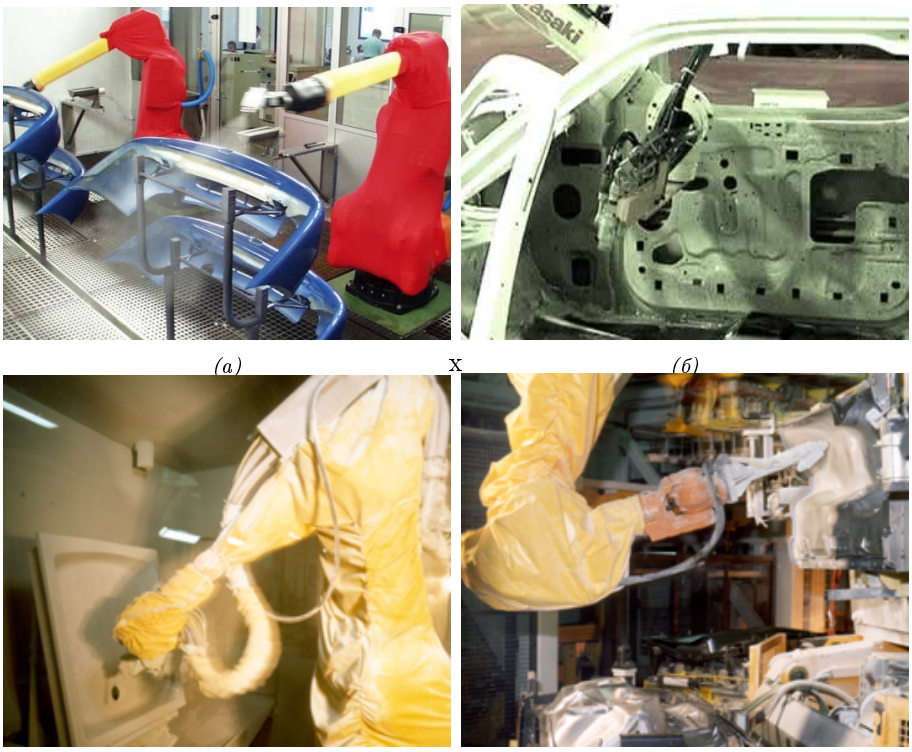


(а) *(б)* *(д)* *(ђ)*

Слика 10.10: Примена индустријских робота у задацима заваривања.

растварача што представља велик проблем јер утиче на здравље радника (сл. 10.11).

Као и у случају заваривања, произвођачи индустријских робота имају посебне развијене софтверске пакете за олакшано програмирање за задатке бојења. Тако на пример АББ има развијен софтверски пакет: Паинтинг ПоwерПацк помоћу којег програмер треба да дефинише полазну и завршну тачку на површини предмета који се боји и на основу карактеристике алата који се користи за бојење добијају се потребне трајекторије врха робота.



(а) *(б)*

(в) *(г)*

Слика 10.11: Бојење прскањем: а) бојење браника аутомобила, б) бојење унутрашњости аутомобила ц) наношење емајла на каде за тушкабине, д) бојење делова које носи конвејер

ЛИТЕРАТУРА

Angeles J., *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems - Theory, Methods and Algorithms*, Springer-Verlag, 2003.

Bruyninckx H., De Schutter J., *Introduction to Inteligent Robotics*, Katholieke Universteit Leuven, 2001.

Craig J., *Introduction to Robotics: Mechanics & Control*, Addison–Wesley, 1986.

Fu K., Gonzales R., Lee C., *Robotics: Control, Sensing, Vision and Intellignece*, McGraw-Hill, 1987.

Hesse S., Malisa V., *Robotik montage handhabung*, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2010

Koren Y., *Robotics for Engineers*, McGraw-Hill, 1985.

Kurefess T. R., *Robotics and Automation Handbook*, CRC Press , 2005.

Lewin A.R.W.Edwards, *Open-Source Robotics and Process Control Cookbook*, Elsevier, 2005.

Nof S., (Ed.), *Handbook of industrial robotics,* John Wiley, 1985.

Nwokah O., Hurmuzlu Y., (Eds), *The Mechanical Systems Design Handbook*, CRC Press, 2002.

Potkonjak V., *Robotika*, Naučna knjiga, 1989

Sandin P. E., *Robot mechanisms and mechanical devices*, McGraw-Hill, 2003.

Sandler B. Z., *Robotics - Designing the mechanisms for automated machinery*, Prentice – Hall, 1991

Sciavicco L., Siciliano B., *Modeling and Control of Robot Manipulators*, McGraw-Hill, 1996.

Selig J.M., *Introductory Robotics*, Prentice – Hall, 1992.

Xie Ming, *Fundamentals of robotics: linking perception to action*, World Scientific Publishing, 2003.